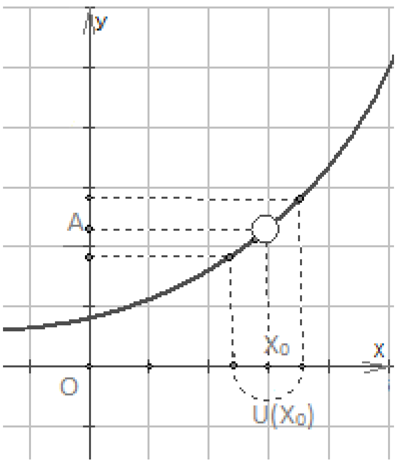
Тема №37 «Пределы функций»

«Математический анализ» - серьезный раздел высшей математики. «Анализируют» здесь довольно тонкие моменты: как ведет себя функция не только в целом, в своей области определения (глобальный подход), но и около конкретной точки (локальный поход). Такой анализ практически всегда связан с понятием предела функции. Изучение в дальнейшем производной основано на понятии предела, поэтому так важно разбираться в данной теме.

Определение и свойства пределов функции



Функция f(x) имеет ***предел A в точке x_0***, если для всех значений x, достаточно близких к x_0 (в окрестности $U(x_0)$), значение f(x) близко к A. При этом x_0 может не принадлежать области определения функции D(f) , хотя окрестность точки x_0 $U(x_0)$ принадлежит D(f). На графике это выглядит как выколотая точка.

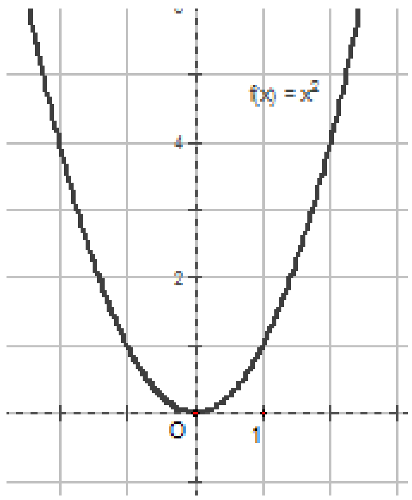
Обозначение: $f(x) \to A$ при $x \to x_0$

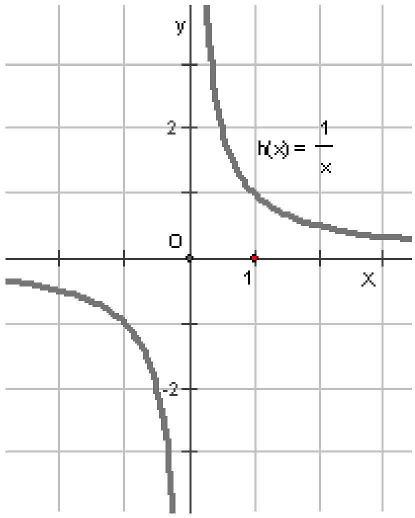
или: $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

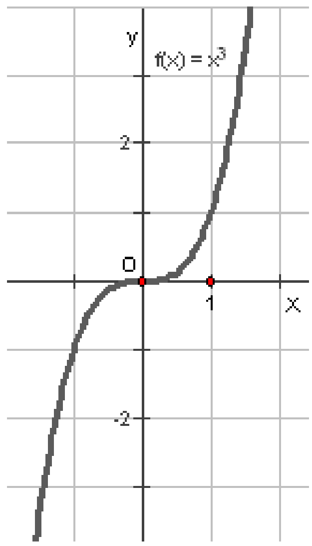
Рассмотрим с помощью некоторых известных графиков функций понятие предела на бесконечности.

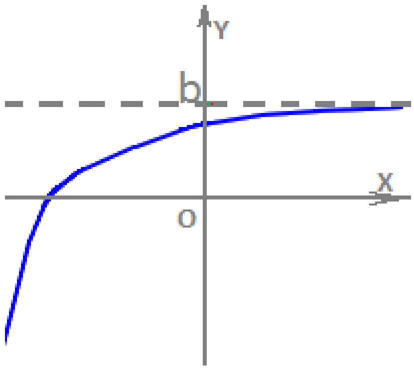
функция	$x \to -\infty$	$x \to +\infty$	$x \to 0$
$f(x) = x^2$	$\to +\infty$	$\to +\infty$	$\to 0$
$f(x) = 1/x$	$\to 0$	$\to 0$	$\to +\infty, -\infty$
$f(x) = x^3$	$\to -\infty$	$\to +\infty$	$\to 0$

$f(x) = x^2$	$f(x) = 1/x$	$f(x) = x^3$







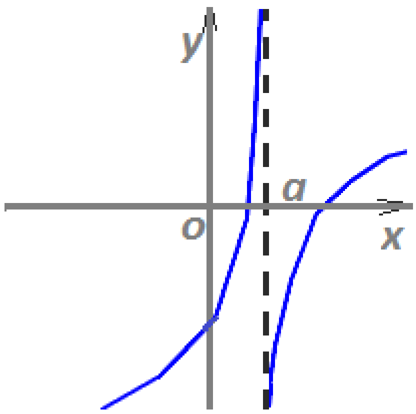


Прямая y = b является ***горизонтальной асимптотой*** графика функции y = f(x), если выполняется одно из равенств:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b,$ (см. рисунок)

или $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b,$

или $\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$

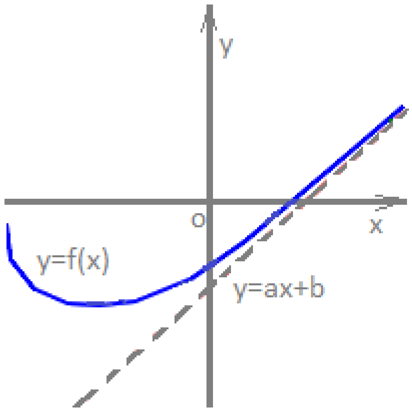


Прямая x = *a* является ***вертикальной асимптотой*** графика функции y = f(x), если выполняется одно из равенств:

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$ (см. рисунок)

или $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$

или $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$



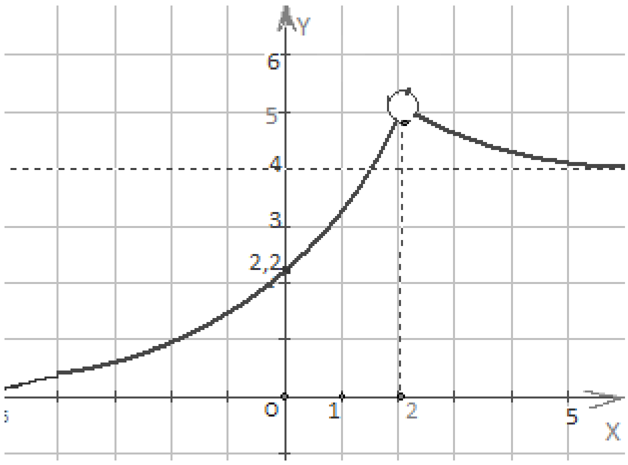
Прямая y = $ax + b$ является ***наклонной асимптотой*** графика функции y = f(x), если выполняется одно из равенств:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = ax + b,$ (см. рисунок)

или $\lim_{x \to -\infty} f(x) = ax + b,$

или $\lim_{x \to \infty} f(x) = ax + b.$

Пример 1. По графику y = f(x) найти:



а) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

б) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$

в) $\lim_{x \to 0} f(x) = 2{,}2$

г) $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$

Свойства пределов функции

1) Предел постоянной величины равен самой постоянной величине:

$$\lim_{x \to x_0} C = C$$

2) Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Аналогично предел разности двух функций равен разности пределов этих функций.

3) Постоянный коэффициент можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to x_0} kf(x) = \mathrm{k}\lim_{x \to x_0} f(x)$$

4) Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

5) Предел частного двух функций равен отношению пределов этих функций при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

Замечание. Принято считать, что

$$\frac{const}{\infty} \to 0, \qquad \infty \cdot \infty \to \infty, \qquad \infty + \infty \to \infty, \qquad const \cdot \infty \to \infty$$

Следующие пределы считают ***неопределенностью***: $\frac{\infty}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$. Если в примере встретилась неопределенность, то надо найти пути для ее устранения. Общие правила:

1) Если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то для решения нужно разложить числитель и знаменатель на множители или разделить на максимальную степень числителя (или знаменателя) и числитель и знаменатель.
2) Если же в числителе или в знаменателе находятся иррациональные выражения и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то для решения надо избавляться от иррациональности, помножив и числитель, и знаменатель на сопряженное выражение.
3) Если же в числителе или в знаменателе находятся тригонометрические выражения и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то для решения используют формулу замечательного предела $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$.

Вычисление пределов функции

Пример 1. Найти предел функции:

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 3x + 5) = 1 - 3 + 5 = 3.$$

Пример 2. Найти предел функции:

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \to \infty} x^2 \left(1 - \left(\frac{3}{x}\right)^{\to 0} + \left(\frac{5}{x^2}\right)^{\to 0}\right) = \lim_{x \to \infty} x^2 = \infty.$$

Пример 3. Найти предел функции:

$\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 0-1}{0^2+3\cdot 0-4}=\frac{1}{4}.$

Пример 4. Найти предел функции:

$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1-5}{1+1}=-3.$

Пример 5. Найти предел функции:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{2\cdot 1^2+3\cdot 1-5}{-1+1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x-5)}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1}(2x-5)=2\cdot(-1)-5=-7.$$

Пример 6. Найти предел функции:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{3x^2+x+1}="\frac{\infty}{\infty}"=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{3x^2+x+1}\times\frac{:x^2}{:x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\left(\frac{3}{x}\right)^{\to 0}-\left(\frac{5}{x^2}\right)^{\to 0}}{3+\left(\frac{1}{x}\right)^{\to 0}+\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\to 0}}=\frac{2}{3}.$$

Пример 7. Найти предел функции:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}="\frac{\infty}{\infty}"=\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}\times\frac{:x^4}{:x^4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{7}{x}\right)^{\to 0}-\left(\frac{15}{x^2}\right)^{\to 0}+\left(\frac{9}{x^3}\right)^{\to 0}+\left(\frac{1}{x^4}\right)^{\to 0}}{5+\left(\frac{6}{x^2}\right)^{\to 0}-\left(\frac{3}{x^3}\right)^{\to 0}-\left(\frac{4}{x^4}\right)^{\to 0}}=\frac{0}{5}=0.$$

Пример 8. Найти предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ 11x}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ 11x}{2\cdot\frac{11x}{11}}=\lim_{x\to 0}\frac{11}{2}\cdot\frac{\sin\ 11\mathrm{x}}{11x}=5{,}5.$$

Пример 9. Найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x}{tg4x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{4x\cdot\frac{tg4x}{4x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{sin4x}{4xcos4x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2cos4x}{\left(\frac{sin4x}{4x}\right)^{\to 1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}2cos4x=2.$$

Пример 10. Найти предел функции

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{6x+2}-\sqrt{6x-3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{6x+2}-\sqrt{6x-3}\right)\left(\sqrt{6x+2}+\sqrt{6x-3}\right)}{\left(\sqrt{6x+2}+\sqrt{6x-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+2-6x+3}{\left(\sqrt{6x+2}+\sqrt{6x-3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\left(\sqrt{6x+2}+\sqrt{6x-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\left(\sqrt{6x+2}\right)^{\to\infty}+\left(\sqrt{6x-3}\right)^{\to\infty}}=0.$$

Непрерывность функции

Мы интуитивно понимаем, что если функция непрерывна, то мы можем ее нарисовать, не отрывая карандаша от листа бумаги.

Функция y = f(x) называется ***непрерывной,*** если она непрерывна в каждой точке своей области определения.

Чтобы понять, что такое непрерывность функции в целом, сначала надо разобраться, что такое непрерывность функции в точке.

Функция y = f(x) называется ***непрерывной в точке*** x = c, если предел функции в точке x = c равен значению функции в этой точке:

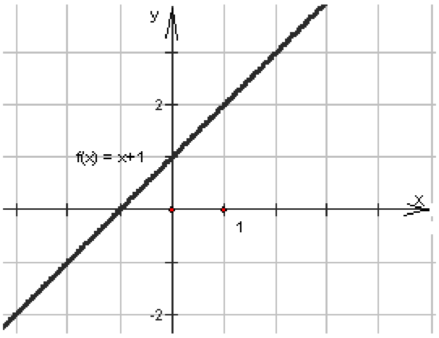
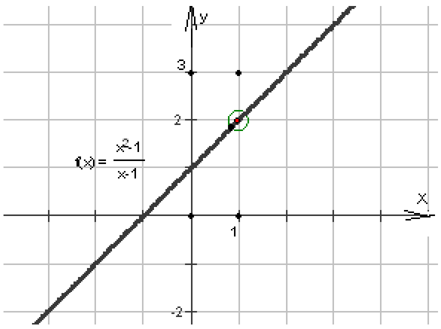
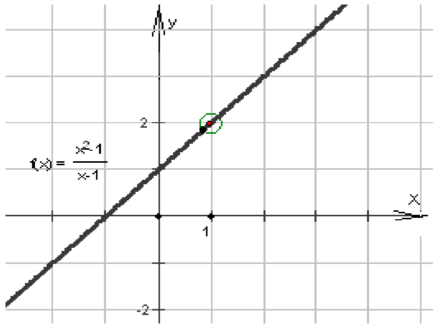
$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$$

Т. е. должны выполняться одновременно три условия:

1) функция определена и в самой точке x = c и в некоторой окрестности этой точки, причем U(c)ϵD(f)
2) существует $\lim_{x\to c}f(x)=A$
3) A = f(c).

Заметим, что в случае непрерывной функции в точке x = c, на графике данная точка выколотой быть не может.

Для иллюстрации, как работает данное определение, рассмотрим три функции (см. таблицу). Все три условия определения выполняются только у первой функции y = x + 1. У второй - не выполняется третье условие, а у третьей функции – первое.

Непрерывная функция	Разрывная в т. x = 1	Разрывная в т. x = 1
$y = x + 1$	$y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, x \neq 1 \\ 3, x = 1 \end{cases}$	$y = \frac{x^2-1}{x-1}$
		
$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$	$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \neq 3$	$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$, *но* $x_0 \notin D_f$

Пример 11. Найти точку разрыва функции $f(x) = \frac{1}{5x+7}$.

Решение: Найдем область определения функции: 5x + 7 ≠ 0, x ≠ -1,4.

Ответ -1,4.

Пример 12. Найти сумму значений точек разрыва функции

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x-3}.$$

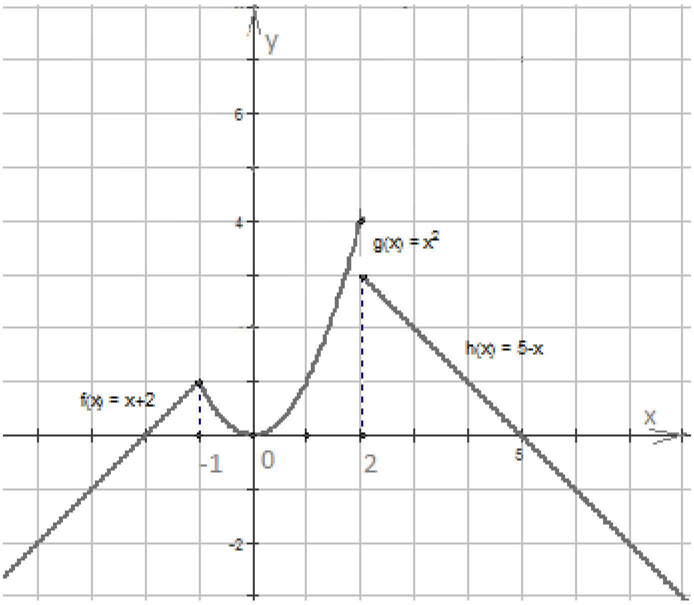
Решение: Найдем область определения функции: $x^2 + 2x – 3 \neq 0$. По теореме, обратной к теореме Виета: $x_1 \neq 1$, $X_2 \neq -3$.

Далее находим сумму значений 1 + (-3) = -2.

Ответ -2.

Пример 13. Указать точку разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ при } x < -1, \\ x^2, \text{при } -1 \leq x < 2, \\ 5 - x \text{ при } x \geq 2. \end{cases}$$



Решение: Построим график данной функции на указанных промежутках. Видим, что целостность функции нарушается при x = 2.

Ответ 2.