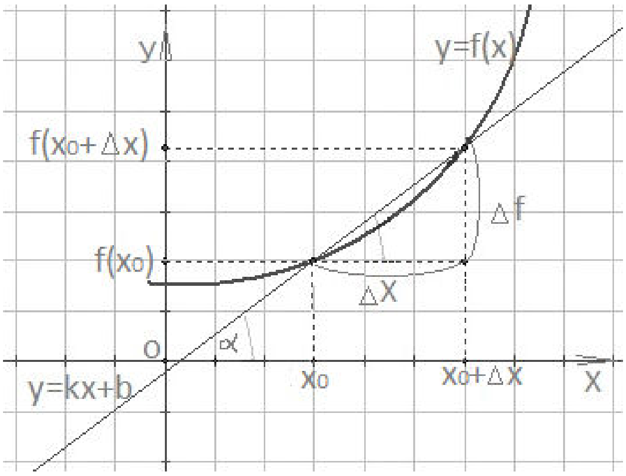
Тема № 39. «Производные функций»



Производной функции в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению переменной, то есть

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Таблица производных:

Функция	*Производная*
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
sinx	*cosx*
cosx	*−sinx*
tgx	$\frac{1}{cos^2 x}$
ctgx	$-\frac{1}{sin^2 x}$
kx+b	*k*
$log_a x$	$\frac{1}{xlna}$
lnx	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x lna$
arcsinx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arccosx	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctgx	$\frac{1}{1+x^2}$
arcctgx	$-\frac{1}{1+x^2}$
lgx	$\frac{lge}{x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Правила вычисления производных

$1.(f+g)' = f' + g'$

Производная суммы двух любых выражений равна сумме производных этих выражений (производная разности равна разности производных).

$3.(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Производная от произведения двух множителей равна произведению производной первого множителя на второй плюс произведение первого множителя на производную второго (сумма поочередно взятых производных от множителей).

$$4.\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Производная от частного двух выражений равна частному разности поочередно взятых производных от множителей и квадрата знаменателя.

$5.(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

Чтобы найти производную от произведения числа на буквенное выражение (на функцию), нужно умножить это число на производную этого буквенного выражения.

$6.(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Для вычисления производной сложной функции необходимо найти производную внешней функции и умножить ее на производную внутренней функции.

Применение производной к исследованию функции

Общая схема исследования функции и построения ее графика включает такие элементы, как нахождение промежутков возрастания и убывания, точек экстремума, нахождение наибольших и наименьших значений и т.д.

Применение производной позволяет упростить исследование функции.

1. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;\ b)$. Функция $y = f(x)$ является постоянной на указанном интервале тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ для любого $x \in (a;\ b)$.

2. Если для дифференцируемых на интервале (a; Ь) функций f(x) и g(x) при любом $x \in (a;\ Ь)$ справедливо равенство $f'(x) = g'(x)$, то для всех $x \in (a;\ b)$ справедливо f(x) = g(x) + c, $c = const$.
3. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и на интервале $(a;\ b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ и при этом равенство $f'(x) = 0$ справедливо только в конечном числе точек интервала (a; b), то функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a;\ b]$.
4. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и на интервале $(a;\ b)$ выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$ и при этом равенство $f'(x) = 0$ справедливо только в конечном числе точек интервала (a; Ь), то функция f(x) убывает на отрезке [a; b].
5. Внутренняя точка области определения $x_0 \in D(f)$ называется ***критической точкой функции*** $y = f(x)$, если в этой точке производная равна нулю или не существует. Точка a называется ***стационарной точкой функции*** $y = f(x)$, если f'(a) = 0.
6. Критическая точка $x_0 \in D(f)$ называется ***точкой локального максимума***, если для всех $x \in D(f)$ в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.
7. Критическая точка $x_0 \in D(f)$ называется ***точкой локального минимума***, если для всех $x \in D(f)$ в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.
8. Точки максимума и минимума функции называются ***точками экстремума.*** Значения функции в этих точках называются ***экстремумами функции.***
9. ***Необходимое условие экстремума.***

Если дифференцируемая в точке x_0 функция имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$ или не существует.

10. Достаточное условие экстремума.

Если при переходе через критическую точку $x_0 \in D(f)$ производная функции меняет знак с «+» на «—», то x_0 — точка ***локального максимума функции.***

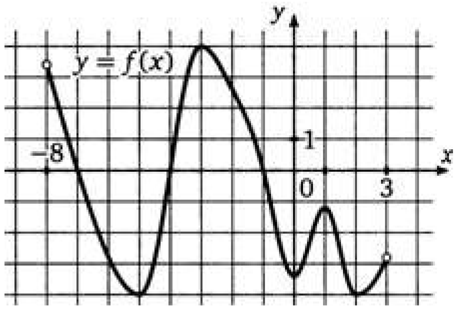
Если при переходе через критическую точку $x_0 \in D(f)$ производная функции меняет знак с «—» на «+», то x_0 — точка ***локального минимума функции.***

Если же производная знака не меняет, то критическая точка экстремумом не является.

11. Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$, непрерывной на $[a,b]$, достигаются либо в критических точках $x_0 \in$ (a; Ь), либо на концах отрезка.

12. *При решении задач следует помнить, что область определения производной функции никогда не бывает шире области определения самой функции!* Т. е. $D(f') \leq D(f)$

Пример 1. На рисунке изображен график функции y = f(x), определенной на интервале (-8; 3). Определить количество целых чисел x таких, что значения производной отрицательны.

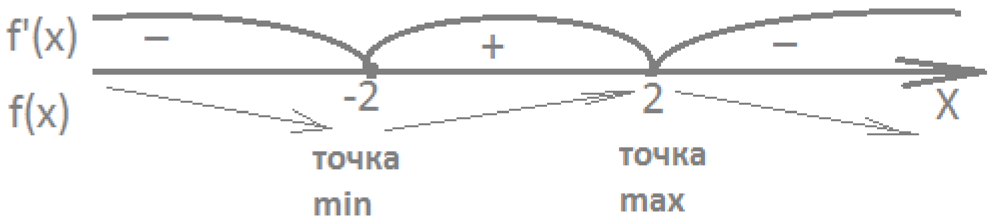


Решение: Производная отрицательна на тех промежутках, где функция убывает. Это промежутки (-8;-5), (-3;0), (1;2). Посчитаем количество целых точек, входящих в данные промежутки. Их ровно 4.
Часто в данном примере *ошибочно* включают крайние точки промежутка в решение. Заметим, что в этих точках производная равна нулю или не существует, а не отрицательна.
Ответ: 4.

Пример 2. Найти точку максимума функции:

$$y = 5 + 4x - \frac{x^3}{3}.$$

Решение: Найдем производную функции на области определения функции D(f) = R: $y' = 4 - x^2$. Чтобы найти критические точки, приравняем производную к нулю $y' = 0$; $4 - x^2 = (2 + x)(2 - x) = 0$; $x = \pm 2$.
Методом интервалов для решения неравенств найдем промежутки знакопостоянства производной функции $y' = (2 + x)(2 - x)$. Для этого изобразим критические точки на числовой оси OX:



Для тех, кто забыл, как определить знак производной с помощью метода интервалов:

1) Возьмем из промежутка (-∞;-2] любое число, например, x = -100 и подставим в выражение производной: $y' = (2 + (-100))(2 - (-100)) < 0$.

2) Возьмем из промежутка (-2;2] любое число, например, x = 0 и подставим в выражение производной: y' = (2 + 0)(2 – 0) > 0.
3) Возьмем из промежутка (2;+ ∞) любое число, например, x = 100 и подставим в выражение производной: y' = (2 + 100)(2 – 100) < 0.
4) Пункты 2) и 3) можно было не делать, так как скобки в выражении производной в первой (нечетной) степени, а, значит, обе влияют на знак выражения. Поэтому автоматически расставляем «+» и «−» в интервалах (-2;2] и (2;+ ∞) соответственно.

Далее, пользуясь свойством 10, определяем точку максимума x = 2.
Ответ 2.

Пример 3. Найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{4}{3}x^3 - 4x - \frac{1}{3} \text{ на отрезке } [0{,}2].$$

Решение: Найдем критические точки функции на (0; 2). Функция дифференцируемая, поэтому $y' = 4x^2 — 4$.
Решая уравнение $4x^2 – 4 = 0$, получим корни $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, причем $x_2 = -1$ не принадлежит [0;2].
Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка.

$$y(0) = -\frac{1}{3},\quad y(1) = -3,\quad y(-1) = y(2) = \frac{7}{3}.$$

Таким образом $min_{[0,2]}$y(x) = y(1) = —3.
Ответ: —3.

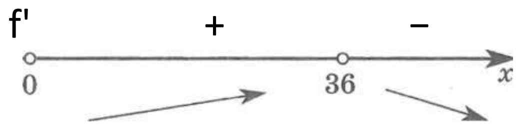
Пример 4. Найти интервалы монотонного возрастания функции

$$y = x^3 e^{-\sqrt{x}}.$$

Решение: Функция определена на полуинтервале [0; +∞), дифференцируема во всех точках интервала (0; +∞).
Найдем производную функции, ее критические точки, интервалы возрастания и убывания.

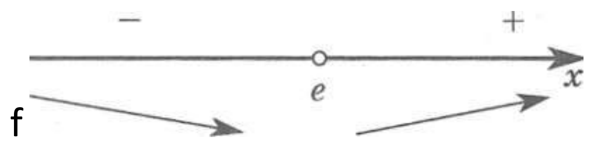
$$f'(x) = 3x^2e^{-\sqrt{x}} + x^3e^{-\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = x^2e^{-\sqrt{x}}\left(\frac{6\sqrt{x} - x}{2\sqrt{x}}\right).$$

Критическая точка функции x = 36. f'(1)> 0, f'(49) < 0.



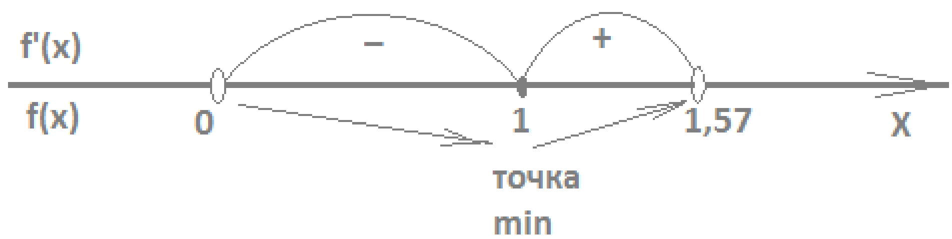
Функция возрастает на отрезке [0; 36] и убывает на полуинтервале [36; +∞)
Ответ: [0; 36].
Пример 5. Найти интервалы монотонности функции y = xlnx.
Решение: Область определения функции y = xlnx D(y) = (0; +∞).

Найдем производную данной функции: y' = lnx − 1.
Найдем критические точки функции: y' = 0;   Lnx— 1 = 0 <=> x = e.
Исследуем поведение функции на полуинтервалах (0; e] и [e; +∞).



Ответ: на полуинтервале (0; e] функция убывает, а на полуинтервале [e; +∞) — возрастает.

Пример 6. Найти точку минимума, принадлежащую промежутку (0;π/2), функции y = 5sinx – 5(x−1)cosx + 4.
Решение: Найдем производную функции на области определения функции D(f) = R: y' = 5cosx – 5(cosx – (x−1)sinx) = (x − 1)sinx.
Чтобы найти критические точки, приравняем производную к нулю y' = 0; (x − 1)sinx = 0; откуда находим x = 1 или x = πn, n ϵ Z. Заметим, что x_1 = 1 принадлежит промежутку (0;π/2), т.к. π/2 ≈ 1,57, а x = πn не принадлежит данному промежутку. Изобразим критические точки на числовой оси ОХ:



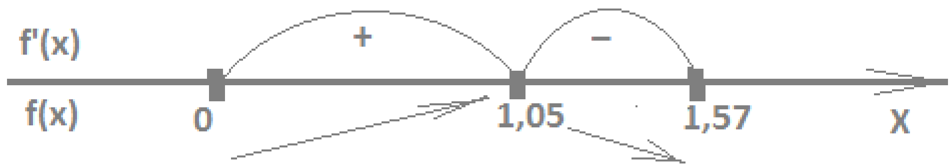
Для определения знака производной на промежутке (0;1) взяли точку $x = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$ и подставили в выражение производной y' = (0,52 − 1)0,5 < 0.
Для определения знака производной на промежутке (1;π/2) взяли точку $x = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}05$ и подставили в выражение производной y' = (1,05 − 1)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ > 0.
Пользуясь свойством 10, определяем точку минимума x = 1.
Ответ 1.
Пример 7. На отрезке [0;$\frac{\pi}{2}$] найти наибольшее значение функции

y = 12cosx + 6√3x − 2√3π + 6.

Решение: Найдем производную функции на области определения функции D(f) = R: y' = −12sinx + 6√3.
Чтобы найти критические точки, приравняем производную к нулю y' = 0;
−12sinx + 6√3 = 0; откуда находим sinx = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ отсюда:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z\ .$$

Заметим, что $x_1 \approx 1{,}05$ принадлежит промежутку $[0;\frac{\pi}{2}]$, а $x_2 \approx 2{,}1$ не принадлежит данному промежутку. Изобразим критические точки на числовой оси OX:

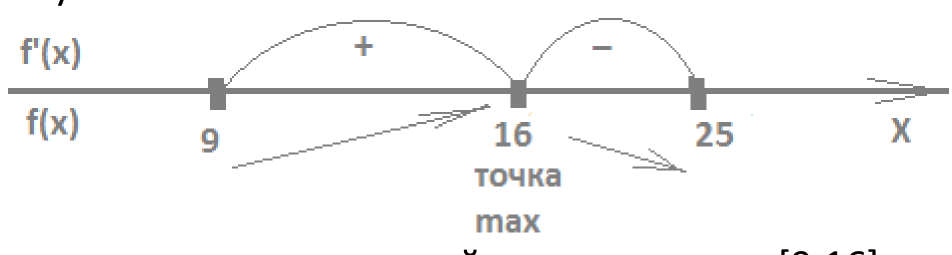


Для определения знака производной на промежутке $[0;\pi/3]$ взяли точку $x = \frac{\pi}{6}$ и подставили в выражение производной $y' = -12\cdot 0{,}5 + 6\sqrt{3} > 0$.
Для определения знака производной на промежутке $(\pi/3;\ \pi/2]$ взяли точку $x = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ и подставили в выражение производной $y' = -12\cdot 1 + 6\sqrt{3} < 0$.
Пользуясь свойством 10, определяем точку максимума $x = \pi/3$, в которой можно найти наибольшее значение функции:
$y(\pi/3) = 12\cos(\pi/3) + 6\sqrt{3}(\pi/3) - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 6 + 2\sqrt{3}\pi - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12$.
Алгоритм нахождения наибольшего или наименьшего значений функции подразумевает проверку значений функции на концах заданного отрезка:
$y(0) = 12\cos 0 + 6\sqrt{3}\cdot 0 - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12 - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 18 - 2\sqrt{3}\pi \approx 7{,}24 < 12$.
$y(\pi/2) = 12\cos(\pi/2) + 6\sqrt{3}(\pi/2) - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 0 + 3\sqrt{3}\pi - 2\sqrt{3}\pi + 6 \approx 11{,}34 < 12$.
Ответ 12.

Пример 8. На отрезке [9;25] найти наибольшее значение функции

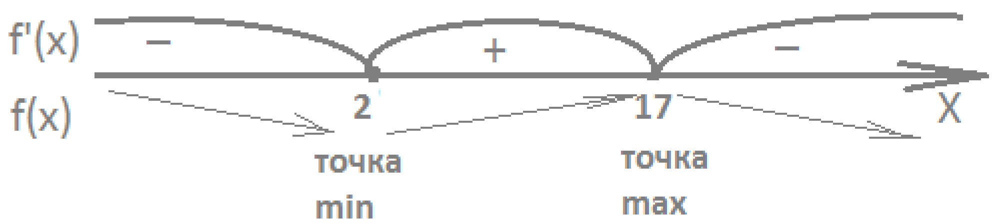
$$y = 6x - x\sqrt{x} + 1.$$

Решение: Найдем производную функции на области определения функции $D(f) = [0;+\infty)$: $y' = (6x - x^{3/2} + 1)' = 6 - 1{,}5\sqrt{x}$.
Чтобы найти критические точки, приравняем производную к нулю $y' = 0$;
$6 - 1{,}5\sqrt{x} = 0$; $\sqrt{x} = 4$; откуда находим $x = 16$.
Заметим, что $x = 16$ принадлежит промежутку [9;25]. Изобразим эту критическую точку на числовой оси OX:



Для определения знака производной на промежутке [9;16] взяли точку $x = 10$ и подставили в выражение производной $y' = 6 - 1{,}5\sqrt{10} \approx 1{,}26 > 0$.
Для определения знака производной на промежутке (9;16] взяли точку $x = 25$ и подставили в выражение производной $y' = 6 - 1{,}5\sqrt{25} = 6 - 7{,}5 < 0$.
Пользуясь свойством 10, определяем точку максимума $x = 16$, в которой можно найти наибольшее значение функции:
$y(16) = 6\cdot 16 - 16\sqrt{16} + 1 = 96 - 64 + 1 = 33$.

Алгоритм нахождения наибольшего или наименьшего значений функции подразумевает проверку значений функции на концах заданного отрезка:
$y(9) = 6\cdot 9 - 9\sqrt{9} + 1 = 54 - 27 + 1 = 28 < 33$.
$y(25) = 6\cdot 25 - 25\sqrt{25} + 1 = 26 < 33$.
Ответ 33.
Пример 9. Найти точку максимума функции $y = (x^2 - 17x + 17)e^{7-x}$.
Решение: Найдем производную функции на области определения функции $D(f) = R$:
$y' = (x^2 - 17x + 17)'e^{7-x} + (e^{7-x})'(x^2 - 17x + 17) =$
$= (2x - 17)e^{7-x} - e^{7-x}(x^2 - 17x + 17) = - e^{7-x}(x^2 - 19x + 34)$.
Чтобы найти критические точки, приравняем производную к нулю $y' = 0$;
$- e^{7-x}(x^2 - 19x + 34) = 0$; $- e^{7-x} \neq 0$ по определению показательной функции; $x^2 - 19x + 34 = 0$; откуда находим по теореме обратной к теореме Виета: $x_1 = 2$, $x_2 = 17$.
Изобразим эти критические точки на числовой оси OX:



Для определения знака производной на промежутке (-∞;-2] взяли точку $x = 0$ и подставили в выражение производной $y' = - e^{7-0}(0^2 - 19\cdot 0 + 34) < 0$.
Для определения знака производной на промежутке (2;17] взяли точку $x = 7$ и подставили в выражение производной $y' = - e^{7-7}(7^2 - 19\cdot 7 + 34) > 0$.
Для определения знака производной на промежутке (17; +∞) взяли точку $x = 20$ и подставили в выражение производной
$y' = - e^{7-20}(20^2 - 19\cdot 20 + 34) < 0$.
Пользуясь свойством 10, определяем точку максимума $x = 17$.
Ответ 17.
Пример 10. На отрезке $[-\frac{5\pi}{6}; 0]$ найти наибольшее значение функции

$$y = 10\sin x - \frac{54}{\pi}x + 4.$$

Решение: Найдем производную функции на области определения функции $D(f) = R$: $y' = 10\cos x - \frac{54}{\pi}$. Чтобы найти критические точки, приравняем производную к нулю $y' = 0$; $10\cos x - \frac{54}{\pi} = 0$; $\cos x = \frac{54}{10\pi} \approx \frac{54}{31} > 1$, т.е. решений нет. Если критических точек нет, то функция на всей области определения ведет себя монотонно (или убывает, или возрастает).

Для определения знака производной можно взять любую точку из области определения. Подставим x = 0 в выражение производной:
y'(0)= 10cos0 – $\frac{54}{\pi}$ $\approx$10 – 17 < 0. Следовательно, функция убывает на всей области определения. Тогда наибольшее значение функция достигает в левой точке нашего промежутка:
y($-\frac{5\pi}{6}$) = 10sin($-\frac{5\pi}{6}$) $-\frac{54}{\pi}$($-\frac{5\pi}{6}$) + 4 = –5 + 45 + 4 = 44.
Ответ 44.

Пример 11. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ найти наибольшее значение функции

y = 10tgx –10x + 9.

Решение: Найдем производную функции на области определения функции D(f): $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon Z$.

$y' = \frac{10}{cos^2 x} - 10$. Чтобы найти критические точки, приравняем производную к нулю y' = 0; 10cos^{2}x = 10; cosx = $\pm$ 1; x = πn, nϵZ. Заметим, что ни одно из решений не является точкой экстремума. Причем при n = 0, x = 0 – тоже не является точкой экстремума, т.к. лежит на границе промежутка, и знак производная в ней менять не может. Это означает, что наша функция на данном промежутке ведет себя монотонно (или убывает, или возрастает).

Для определения знака производной можно взять любую точку из нашего промежутка. Подставим x =$-\frac{\pi}{6}$ в выражение производной:

$$y'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{10}{\cos^2(-\frac{\pi}{6})} - 10 = \frac{10}{\frac{3}{4}} - 10 = \frac{40}{3} - 10 = 13\frac{1}{3} - 10 > 0.$$

Следовательно, функция возрастает на нашем промежутке. Тогда наибольшее значение функция достигает в правой точке нашего промежутка:

y(0) = y = 10tg0 – 10·0 + 9 = 9.

Ответ 9.