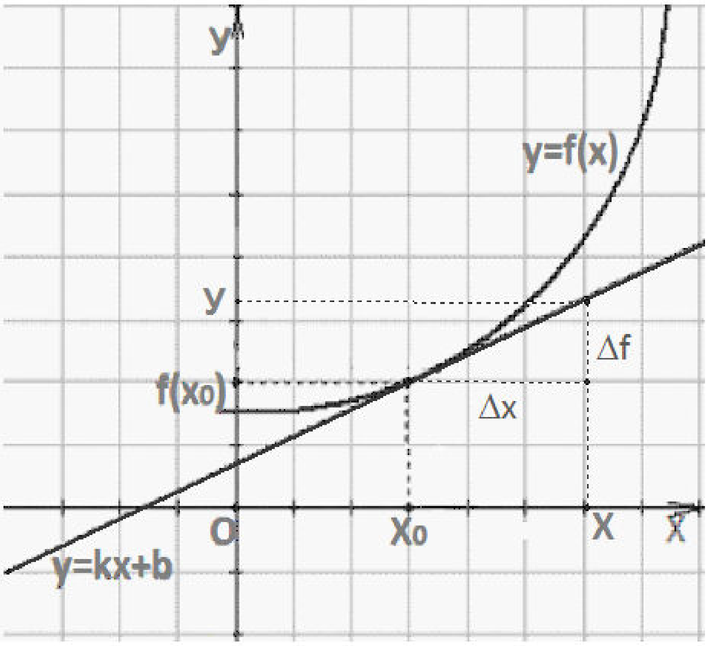
Тема №40 «Касательные к графику функции»

Геометрический смысл производной

Значение производной функции y = f(x) в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной (k), проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0.



Угловой коэффициент касательной равен тангенсу угла касательной с положительным направлением оси OX.

$$f'(x_0) = k = tg\alpha.$$

Уравнение касательной проще запомнить, если понимать ее геометрическое «происхождение»:

$tg\alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$;

$\Delta f = tg\alpha \cdot \Delta x$;

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$;

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Физический смысл производной

Если тело или материальная точка движутся по закону S = S(t), то значение ***мгновенной скорости*** движения тела равно значению первой производной функции, задающей закон движения, в указанный момент времени t_0: ***$v_0 = S'(t_0)$***, а значение ***мгновенного ускорения*** движения тела равно значению второй производной функции, задающей закон движения, в указанный момент времени t_0: ***$a(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0)$***.

Пример 1. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 5 + 6t - \frac{t^3}{3}$, где путь S(t) измеряется в метрах, а время t – в секундах. Найти а) скорость тела в момент t = 1 сек.; б) ускорение тела в момент t = 3 сек.

Решение: а) Производная пути – это мгновенная скорость тела в данный момент времени: $v(t) = S'(t) = 6 - 3\frac{t^2}{3} = 6 - t^2$.

Тогда $v(1) = S'(1) = 6 - 1^2 = 5$ (м/с).

б) Производная скорости – это мгновенное ускорение тела в данный момент времени: $a(t) = v'(t) = (6 - t^2)' = -2t$.

Тогда $a(3) = -2 \cdot 3 = -6 \left(\frac{м}{с^2}\right)$. Знак минус показывает, что движение равнозамедленное.

Ответ а) 5; б) −6.

Пример 2. В какой момент времени тело остановится, если тело движется по закону $S(t) = 6t – t^2$

Решение: а) В момент остановки скорость равна нулю, т.е.

$v(t) = S'(t) = 6 – 2t$; $v(t) = 0$, когда $6 – 2t = 0$, т.е. $t = 3$(с).

Ответ 3.

Пример 3. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = x^3 − 3x^2 + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

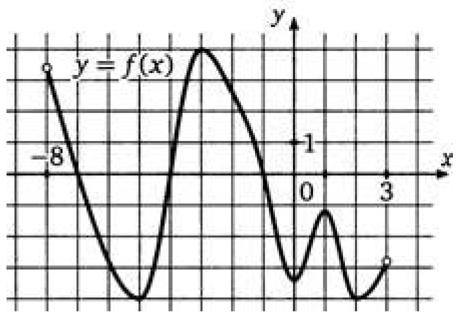
Решение: Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции – это производная функции в данной точке:

$k = y' = 3x^2 – 6x$; $y'(2)= 3\cdot 2^2 – 6\cdot 2 = 0$.

Заметим, что если $k = 0$, касательная параллельна оси OX.

Ответ 0.

Пример 4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-8;3). Найти количество точек, в которых производная функции равна 0.

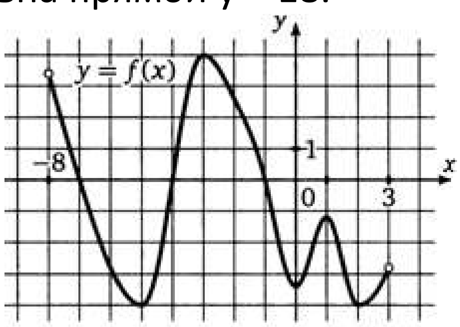


Решение: Согласно геометрическому смыслу производная – это тангенс угла наклона касательной в точке графика функции. Тангенс равен нулю, если касательная параллельна оси OX. Таких точек на графике 5:

при $x = -5$, $x = -3$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

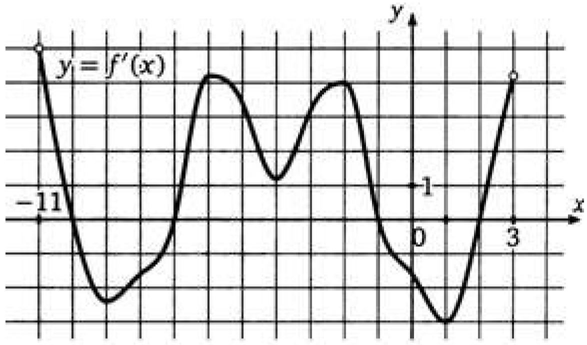
Ответ:5.

Пример 5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (—8;3). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 18$.



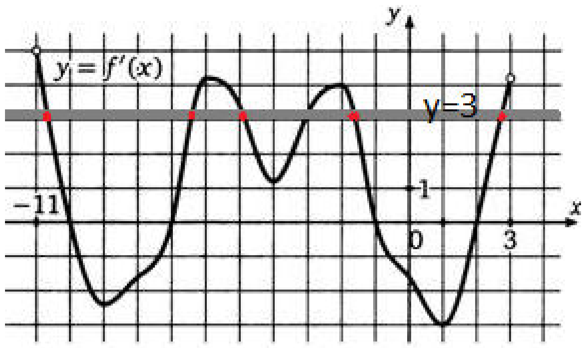
Решение: В уравнении касательной $y = 0x + 18$, $k = 0$, поэтому касательные параллельны оси OX. Таких прямых на графике можно провести 5 штук в точках: $x = -5$, $x = -3$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Ответ 5.



Пример 6. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (—11; 3). Найдите количество таких чисел x что касательная к графику функции f(x) в точке x, параллельна прямой

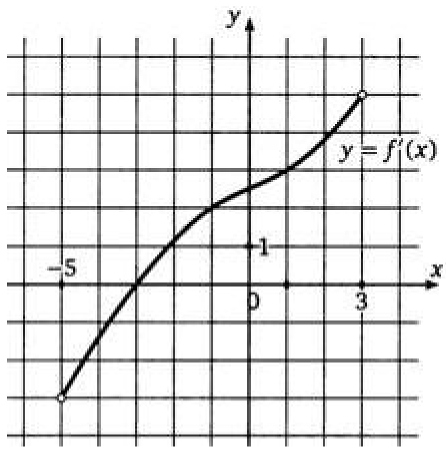
y = 3x — 11 или совпадает с ней.



Решение: В уравнении касательной y=3x—11, k = 3, а, значит, производная функции равна 3. Проведем прямую y = 3 и найдем точки пересечения с графиком: их ровно 6 штук.

Ответ 6.

Пример 7. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (-5; 3). Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции f(x) параллельна прямой y = 2x + 7 или совпадает с ней.



Решение: В уравнении касательной y=2x+7, k=2, а, значит, производная функции равна 2. Проведем прямую y = 2 и найдем точки пересечения с графиком: их ровно 1 штука, в точке с *аб*сциссой x = -1.

Ответ -1.

Пример 8. Прямая y = 38x – 28 параллельна касательной к графику функции $y = 3x^2 + 8x - 2$. Найти абсциссу точки касания.

Решение: В уравнении касательной y = 38x – 28, k = 38, а, значит, производная функции равна 38: k = y' = 6x + 8; 6x + 8 = 38; 6x = 30; x = 5.

Ответ 5.

Пример 9. Найти тангенс наклона касательной, проведенной к графику функции $y = 5x^2 - 7x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение: Тангенс наклона касательной, проведенной к графику функции – это производная функции в данной точке:

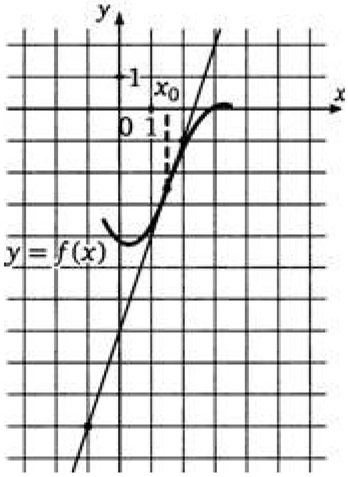
$tg\alpha = y' = 10x - 7$; $y'(2) = 10 \cdot 2 - 7 = 13$.

Ответ 13.

Пример 10. В точке А графика функции $y = -x^2 + 4x + 11$ проведена касательная к нему, параллельная прямой $y = 1 - 2x$. Найти сумму координат точки А.

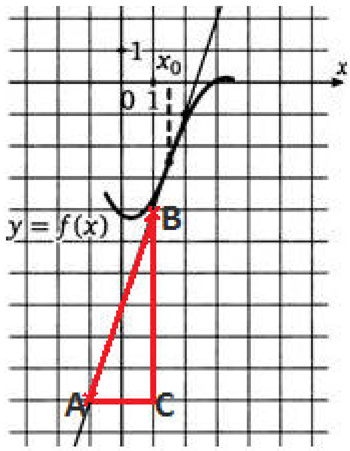
Решение: В уравнении касательной $y = 1 - 2x$, $k = -2$, а, значит, производная функции равна -2: $y' = -2x + 4$; $-2x + 4 = -2$; $-2x = -6$; $x = 3$, тогда $y(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 + 11 = 14$. Сумма координат точки А: $3 + 14 = 17$.

Ответ 17.



Пример 11. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Решение: 1-й способ: По геометрическому смыслу производной $f'(x_0)=k=\text{tg}\alpha$, значит, чтобы найти $f'(x_0)$ найдем k – угловой коэффициент касательной. Для

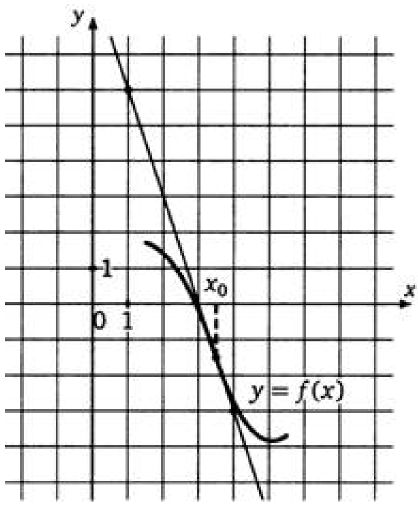


этого найдем координаты двух точек на касательной А(3;2) и В(0; -7) и подставим их в формулу

$k=(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$: $k = (-7 - 2)/(0 - 3) = -9:(-3) = 3$.

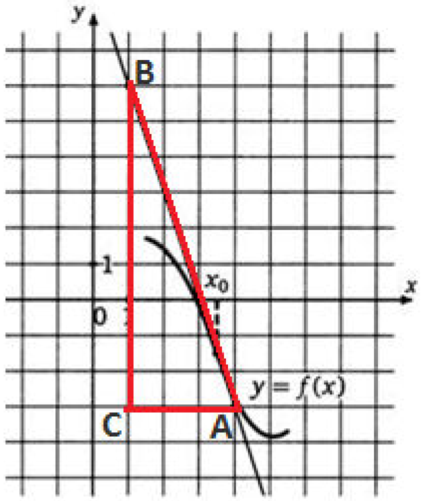
2-й способ: Найдем производную как тангенс угла наклона касательной. В прямоугольном треугольнике ABC: $\text{tg}A = BC/AC = 6/2 = 3$.

Ответ 3.



Пример 12. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Решение: 1-й способ: По геометрическому смыслу производной $f'(x_0)=k=\text{tg}\alpha$, значит, чтобы найти $f'(x_0)$ найдем k – угловой коэффициент касательной. Для этого найдем координаты двух точек на касательной А(4;-3) и В(1; 6) и подставим их в формулу $k=(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$:



$k = (6 - (-3))/(1 - 4) = 9:(-3) = -3.$

2-й способ: Найдем производную как тангенс угла наклона касательной. В прямоугольном треугольнике ABC: tgA = BC/AC = 9/3 = 3. Учитывая факт, что прямая убывающая, т.е. $k < 0$, то получим $k = -3$.

Ответ –3.

Пример 13. Прямая $y = -5x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7{,}5x^2 + 7x - 6$. Найти абсциссу точки касания. Если их несколько, то их сумму.

Решение: В уравнении касательной $y=-5x - 11$, $k = -5$, а, значит, производная функции равна –5. Найдем производную функции и приравняем ее к –5: $k = y' = 3x^2 + 15x + 7$; $3x^2 + 15x + 7 = -5$; $3x^2 + 15x + 12 = 0 | :3$; $x^2 + 5x + 4 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = -4$. Сумма точек: $-1 + (-4) = -5$.

Ответ -5.