Тема №41 «Задания с параметром»

Основные формулировки заданий с параметром:

1) Найти все значения параметра, при каждом из которых выполняется определенное условие.
2) Решить уравнение или неравенство с параметром. *a*

Линейная функция в заданиях с параметром

А) $f(a)\cdot x = g(a)$,

При $f(a) \neq 0$, решение $x = \frac{g(a)}{f(a)}$,

При $f(a) = 0$, $g(a) \neq 0$ решений нет

При $f(a) = 0$, $g(a) = 0$ решений бесконечно много $x \in R$.

Б) $f(a)\cdot x < g(a)$,

При $f(a) > 0$, $x \in (-\infty; g(a)/f(a))$

При $f(a) < 0$, $x \in (g(a)/f(a); +\infty)$

При $f(a) = 0$, $g(a) < 0$ решений нет

При $f(a) = 0$, $g(a) > 0$ решений бесконечно много $x \in R$.

Пример 1. Решить неравенство и найти значение параметра t, при котором неравенство $(2x - 1)t^2 - (9x - 10)t + 4x + 8 \leq 0$ не имеет решений. Если таких значений несколько, то найти их сумму.

Решение: Это линейное неравенство относительно «х». Раскроем скобки и вынесем его за скобки: $(2t^2 - 9t + 4)x \leq t^2 - 10t - 8$, $(t - 4)(2t - 1)x \leq t^2 - 10t - 8$,

1) Если $(t - 4)(2t - 1) > 0$, то решение $x \in (-\infty; B]$, где $B = \frac{t^2 - 10t - 8}{(t-4)(2t-1)}$
2) Если $(t - 4)(2t - 1) < 0$, то решение $x \in [B; +\infty)$
3) Если $(t - 4)(2t - 1) = 0$, то

   При $t = 4$, $0\cdot x \leq -8$, нет решений

   При $t = ½$, $0\cdot x \leq -12\frac{3}{4}$, нет решений

Все решения: при $t \in (-\infty; 1/2) \cup (4; +\infty)$, то $x \in (-\infty; B]$, где $B = \frac{t^2 - 10t - 8}{(t-4)(2t-1)}$.

при $t \in (1/2; 4)$, то $x \in [B; +\infty)$, при t = ½ или при t = 4 решений нет.

Нас интересует случай, когда решений нет, тогда 4 + ½ = 4,5.

Ответ 4,5.

Пример 2. Найти все значения параметра t, при которых система имеет 2012 решений. Если таких значений несколько, то найти их сумму.

$$\begin{cases} (2t^2 - 7t)x - 25y = 2t^2 - 9t - 50, & (1) \\ 6x - 5y + 3 = 0. & (2) \end{cases}$$

Решение: (1) и (2)– это линейные уравнения относительно двух переменных. Каждое из уравнений является уравнением прямой. Если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение. Если прямые совпадают, то решений бесконечно много или, например, 2012 штук.

Выразим из (2) 5у и подставим в (1), получим:

$$\begin{cases}(2t^2-7t)x-5(6x+3)=2t^2-9t-50,\\ 5y=6x+3\end{cases}$$

Продолжим решать первое уравнение:

$$(2t^2-7t)x-30x-15=2t^2-9t-50,$$
$$(2t^2-7t-30)x=2t^2-9t-35,$$
$$(t-6)(2t+5)x=(t-7)(2t+5).$$

Из последнего уравнения видно, что система имеет бесконечно много решений, когда 2t + 5 = 0, т.е. t = -2,5.

Заметим, что при t = 6 или t =7 решений нет.

Ответ -2,5.

Квадратичная функция в заданиях с параметром

Уравнение вида $Ax^2 + Bx + C = 0$, где A, B, C – выражения, зависящие от параметров, A≠0, x – переменная, называется ***квадратным уравнением с параметрами***.

Во множестве действительных чисел это уравнение исследуется по следующей схеме.

1) Если A = 0, то имеем линейное уравнение Bx + C =0.
2) Если A≠0 дискриминант $D = B^2 – 4AC < 0$, то уравнение решений не имеет.
3) Если A≠0 дискриминант D =0, то уравнение имеет единственное решение x = -B/(2A).
4) Если A≠0 дискриминант $D = B^2 – 4AC < 0$, то уравнение имеет два корня $x_{1,2}$= (-B±√D)/(2A).

Пример 3. Найти все значения параметра t, для которых квадратное уравнение $(t – 1)x^2 + 2(2t + 1)x + 4t +3 = 0$ а) имеет два корня; б) не имеет корней; в) имеет один корень.

Решение: Данное уравнение по условию является квадратным, поэтому t – 1 ≠ 0, t ≠ 1. Рассмотрим дискриминант: $D = 4(2t + 1)^2 – 4(t - 1)(4t + 3) = 4(5t + 4)$.

Согласно схеме исследования, имеем:

а) $\begin{cases}D>0\\ t\neq 1\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}4(5t+4)>0,\\ t\neq 1\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}t>-4/5\\ t\neq 1\end{cases},$

б) $\begin{cases}D<0\\ t\neq 1\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}t<-\frac{4}{5}\\ t\neq 1\end{cases} \leftrightarrow t<-\frac{4}{5};$

в) $\begin{cases}D=0\\ t\neq 1\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}t=-4/5,\\ t\neq 1\end{cases} \leftrightarrow t=-4/5.$

Ответ а) при t > -4/5 t ≠ 1 два корня; б) при t < -4/5 нет корней;
в) при t = -4/5 один корень.

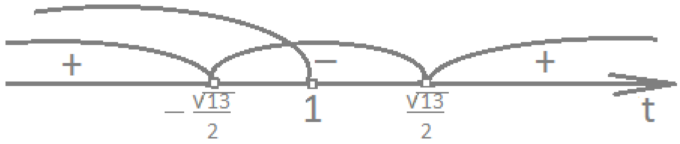
Пример 4. Найти наибольшее целое значение параметра t, для которого выполняется неравенство: $(1-t)x^2+3x-t-1>0$.

Решение: В левой части неравенства квадратный трехчлен, который будет всегда положительным при ветвях параболы, направленных вверх (т.е. 1 – t > 0 или t < 1) и отрицательном дискриминанте:

$$D=9+4(1-t)(t+1)<0, \qquad D=13-4t^2=-4\left(t^2-\frac{13}{4}\right)<0.$$

$$\begin{cases} t < 1 \\ 4\left(t-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(t+\frac{\sqrt{13}}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

Изобразим решения системы на числовой прямой:



Все решения неравенства: t ϵ (−∞; −√13/2). Наибольшее целое число ≈-2, т.к. −√13/2 ≈ -1,8.
Ответ -2.

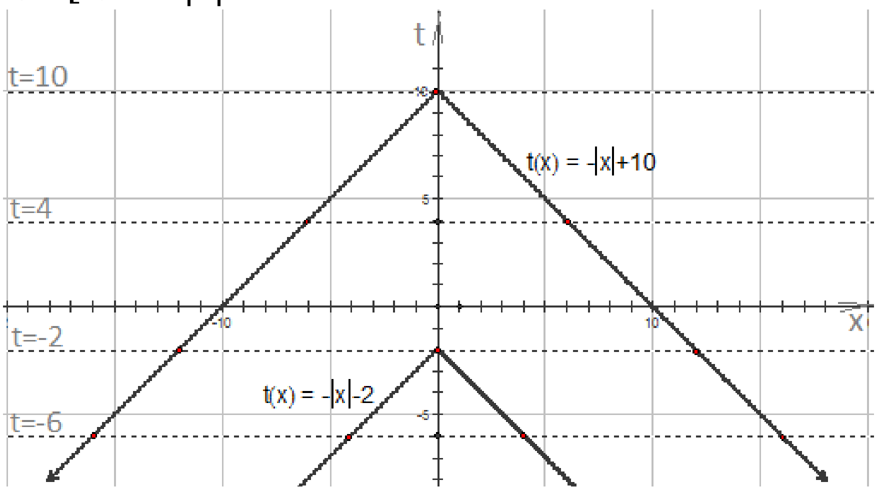
Применение свойств функций и производной в задачах с параметром
Графический метод

Чтобы найти все значения параметра t, при которых уравнение f(x) = g(t) разрешимо (т.е. имеет хотя бы одно решение), надо:
 1) найти множество значений функции f(x), когда x пробегает область определения функции,
 2) потребовать, чтобы значения функции g(t) менялись на этом множестве.
Например, если множество значений f(x) промежуток [A;B], то уравнение f(x) = g(t) разрешимо для значений параметра t, удовлетворяющих неравенствам: A<g(t)<B. Очевидно, что для всех остальных значений t уравнение f(x) = g(t) не имеет решений.

Замечание. При нахождении множества значений функции можно воспользоваться всеми правилами нахождения наибольшего и наименьшего значений на промежутке, включая правила, основанные на использовании производной.

Пример 5. Найти все значения параметра t, при которых уравнение ||x| + t – 4| = 6 имеет а) 4 корня; б) три корня; в) 2 корня; г) 1 корень; д) не имеет корней.
Решение: Данное уравнение равносильно системе

$\left[\begin{array}{l} |x| + t - 4 = 6, \\ |x| + t - 4 = -6 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t = -|x| + 10, \\ t = -|x| - 2 \end{array}\right.$ Построим график:



Проводя прямые вида t = k параллельно оси OX, определяем количество корней уравнения.

Ответ а) при $t \in (-\infty; -2)$ уравнение имеет 4 корня;

б) при $t = -2$ уравнение имеет 3 корня;

в) при $t \in (-2; 10)$ уравнение имеет 2 корня;

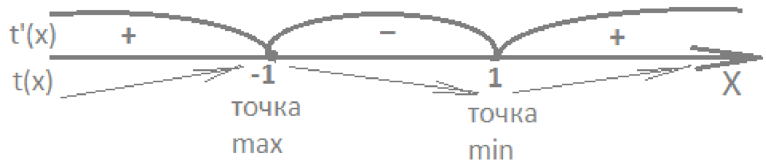
г) при $t = 10$ уравнение имеет один корень;

д) при $t \in (10; +\infty)$ уравнение не имеет корней.

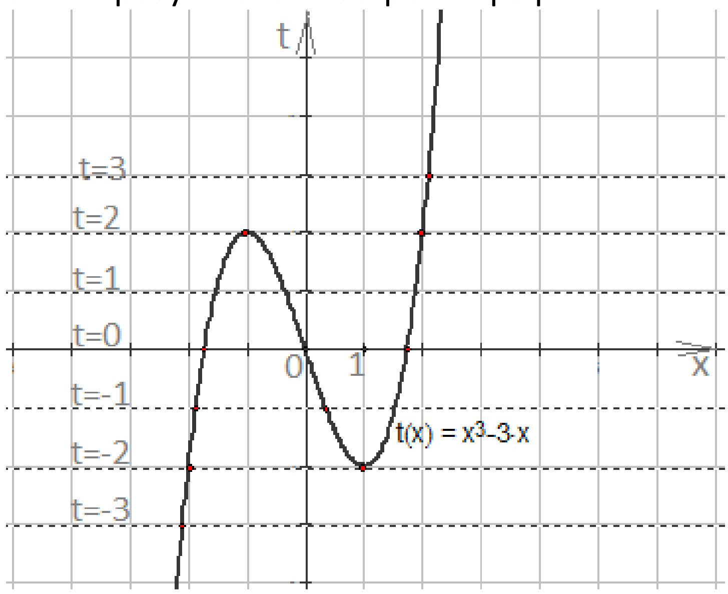
Пример 6. В зависимости от значений параметра t найти число корней уравнения

$$x^3 - 3x - t = 0.$$

Решение: Построим эскиз графика $t = x^3 - 3x$. Для этого найдем критические точки функции и ее значение в этих точках: $t' = 3x^2 - 3 = 0$; $x = \pm 1$; $t(-1) = 2$; $t(1) = -2$. Определим знак производной $t' = 3(x-1)(x+1)$, используя метод интервалов:



На основании полученных результатов построим график:



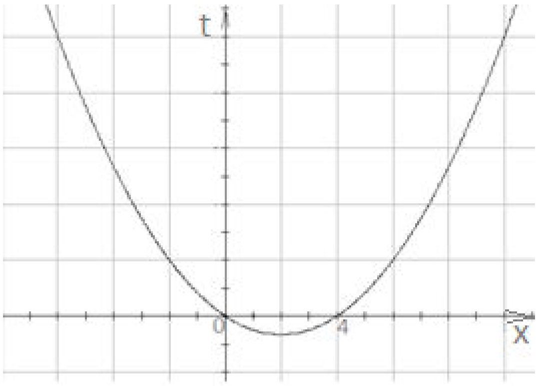
Проводя прямые t = k, определим число решений данного уравнения.

Ответ при $t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ одно решение; при $t = \pm 2$ два решения; при $t \in (-2; 2)$ три решения.

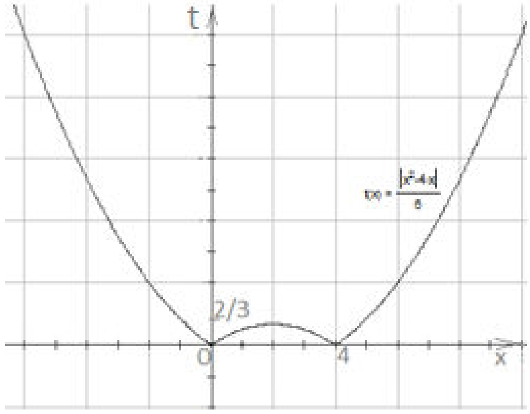
Пример 7. Для всех значений параметра t решить уравнение $|x^2 - 4x| - 6t = 0$.

Решение: Заданное уравнение является линейным относительно параметра t. Построим график функции $t = \frac{1}{6}|x^2 - 4x|$. Для этого найдем вершину параболы:

$x_0 = 2/3$ и точки, в которых парабола пересекает ось OX: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Далее, используя преобразования графиков с модулем, отображаем часть параболы относительно оси симметрии OX.



=>



Проведем прямую t = k и найдем точки пересечения этой прямой с построенным графиком. В результате исследований получаем:

Ответ если $t < 0$, то $x \in \emptyset$; если $t = 0$, то $x \in \{0;4\}$;

если $t \in (0;2/3)$, то $x \in \left\{2 \pm \sqrt{4+6t};\ 2 \pm \sqrt{4-6t}\right\}$;

если $t = 2/3$, то $x \in \left\{2-2\sqrt{2};\ 2; 2+\sqrt{2}\right\}$;

если $t > 0$, то $x \in \left\{2-\sqrt{4+6t};\ 2+\sqrt{4+6t}\right\}$.

Пример 8. При каком значении m функция $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-5) + \log_{\frac{1}{2}}(m-2x)$ имеет минимум в точке с абсциссой, равной 6,5?

Решение: Найдем область определения функции.

$$\begin{cases} x-5 \succ 0, \\ m-2x \succ 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \succ 5, \\ x \prec \dfrac{m}{2}; \end{cases}$$

Значит, D(y) = $\left(5; \dfrac{m}{2}\right)$

Тогда функцию можно записать в следующем виде: $y = \log_{\frac{1}{2}}((x-5)(m-2x))$, т.е. $y = \log_{\frac{1}{2}}(-2x^2 + (10+m)x - 5m)$

Ветви квадратичной функции $f(x) = -2x^2 + (10+m)x - 5m$ направлены вниз, значит, она имеет максимум в точке x_0, являющейся абсциссой вершины параболы. Точка максимума квадратичной функции совпадает с точкой минимума функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(-2x^2 + (10+m)x - 5m)$ в силу того, что функция вида $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ монотонно убывает при $t > 0$.

Найдем абсциссу вершины квадратичной функции: x_0 = (10+m)/4. По условию минимум должен быть в точке с абсциссой, равной 6,5: 6,5 = (10+m)/4.

Отсюда m = 16 .

Ответ 16.

Пример 9. При каком значении параметра касательная, проведенная к графику функции $y = 2x + \frac{a}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, параллельна прямой $y = -5x + 4$?

Решение: Если касательная, проведенная к графику функции в точке параллельна некоторой прямой, то производная функции в точке касания равна угловому коэффициенту прямой. Найдем производную функции $y = 2x + \frac{a}{x}$ в точке с абсциссой x_0 = 1: y' = 2 – a/x^2 ; y' = -5; 2 – a/x^2 = -5; a = 7.

Ответ 7.

Пример 10. При каких значениях параметра *a* функция $y = (a+2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$ монотонно убывает на всей числовой оси?

Решение: Функция убывает на всей числовой прямой, если ее производная неположительная на всей числовой прямой.

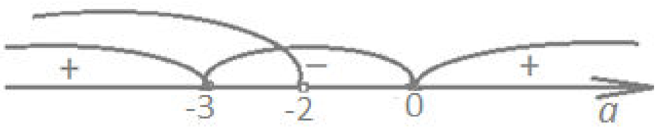
Найдем производную функции, составим соответствующее неравенство и решим его: $y' = 3(a+2)x^2 - 6ax \ + 9a$

$$3(a+2)x^2 - 6ax \ + 9a \le 0$$

$$3(a+2)x^2 - 6ax \ + 9a = 0$$

$$D = -72a(a+3)$$

Чтобы неравенство выполнялось при всех действительных x, необходимо выполнение двух условий: $\begin{cases} a+2 < 0, \\ -72a(a+3) \le 0, \end{cases}$ $\begin{cases} a < -2, \\ 72a(a+3) \ge 0. \end{cases}$



Ответ $(-\infty; -3]$

Пример 11. При каком наибольшем значении *a* функция $f = \frac{2}{3}x^3 - ax^2 + ax + 7$ возрастает на всей числовой прямой?

Решение: Производная функции неотрицательна на всей числовой прямой. Составим соответствующее неравенство и решим его:

$f'(x) = 2x^2 - 2ax + a$, т.е. $2x^2 - 2ax + a \ge 0$

$D = 4a^2 - 8a = 4a(a-2)$ Чтобы неравенство выполнялось при всех действительных x, необходимо чтобы $4a(a-2) \le 0$ (так как коэффициент при x^2 положителен). Неравенство верно при $a \in [0;2]$. Выберем наибольшее.

Ответ 2.

Пример 12. При каких значениях параметров *a* и *b* все решения неравенства

$x^4 + x^3 - x^2 + ax + b \le 0$ образуют отрезок [-2; 1] ?

Решение: Для выполнения условия задачи необходимо, чтобы числа -2 и 1 были корнями уравнения $x^4 + x^3 - x^2 + ax + b = 0$. Подставив эти значения в уравнение, получим систему уравнений для определения *a* и *b*: $\begin{cases} 1+1-1+a+b=0 \\ 16-8-4-2a+b=0 \end{cases}$; $\begin{cases} a+b=-1 \\ -2a+b=-4 \end{cases}$; $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.

Убедимся, что уравнение $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ не имеет других корней. Разложим его левую часть на множители: $(x - 1)(x + 2)(x^2 + 1) = 0$. Видим, что последний множитель не обращается в 0, поэтому других корней уравнение не имеет.

Вернемся к решению неравенства. Запишем его в виде: $(x - 1)(x + 2)(x^2 + 1) \le 0$. Метод интервалов дает решение [-2; 1], то есть условие задачи выполнено.

Ответ *a = 1, b = -2.*

Пример 13. При каких значениях параметра *a* число $\frac{\pi}{2}$ является периодом функции $y = \frac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}$?

Решение: Для того чтобы число $\frac{\pi}{2}$ являлось периодом указанной функции, необходимо выполнение равенства $y(x+\pi/2)=y(x)$ при всех допустимых x, по определению периодической функции. Составим соответствующее уравнение и решим его:

$$\frac{\cos 2(x+\frac{\pi}{2})}{3a + \sin 2(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}; \qquad \frac{\cos(2x+\pi)}{3a + \sin(2x+\pi)} = \frac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}$$

$$\frac{-\cos 2x}{3a - \sin 2x} = \frac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}$$

Данное равенство справедливо лишь при *a* = 0.

Ответ 0.

Пример 14. Найти все значения *a*, при которых выражение $\sqrt{(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3}$ имеет смысл при всех действительных числах.

Решение: Данное задание можно переформулировать следующим образом: найти все значения а, при которых областью определения функции $y = \sqrt{(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3}$ являются все действительные числа.

Значит, для всех действительных чисел должно выполняться неравенство

$$(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3 \ge 0 \ .$$

Сначала запишем уравнение $(a+1)x^2-2(a-1)x+3a-3=0$

$D=4(a-1)(-2a-2)$

Чтобы неравенство было справедливо при всех действительных x, то $D\le 0$

Составим неравенство и решим его: $4(a-1)(-2a-2)\le 0$; $(a-1)(a+1)\ge 0$

Неравенство справедливо при всех а, таких что $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Выражение $\sqrt{(a+1)x^2-2(a-1)x+3a-3}$ имеет смысл при всех действительных числах при таких а, что $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Ответ $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$