Тема № 45 «Задачи на работу и производительность»

В определенном смысле задачи на работу схожи с задачами на движение. Сравните формулы: $S = vt$, $V = vt$. Роль скорости v здесь играет производительность труда, а роль расстояния S — объем работы V.

Задачи на совместную работу

Для понимания схемы решения задач на совместную работу, рассмотрим упрощенную модель.

Пример 1. Вася с Колей мастерят из бумаги кораблики. Вася может сделать за 1 час 15 корабликов, а Коля только 10. Сколько времени им потребуется на 100 корабликов?

Решение: За 1 час мальчики делают 15 + 10 = 25 корабликов. Значит, 100 корабликов они сделают за 100 : 25 = 4 часа.

Итак, *если дан общий объем работы и производительности труда «участников» задачи, то время совместной работы находят, разделив объем работы на совместную производительность труда:*

$$t_{совм} = \frac{V}{v_1 + v_2}. \qquad (1)$$

Пример 2. Вася выполняет свою работу за 2 часа, а Коля – за 3 часа. Сколько времени они потратят, если будут делать эту работу вдвоем?

Решение: Скорость работы каждого из мальчиков: $v_1 = \frac{V}{t_1}$, $v_2 = \frac{V}{t_2}$ подставим в формулу (1): $t_{совм} = \frac{V}{\frac{V}{t_1} + \frac{V}{t_2}} = \frac{V}{V\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$, $\quad t_{совм} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$ или $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_{совм}}$.

Поэтому, когда в задаче объем работы в явном виде не задан, его иногда удобно принять равным единице.

В нашей задаче $t_{совм} = \frac{2 \cdot 3}{2+3} = 1{,}2$ (ч).

Иногда в задачах на совместную работу можно обойтись без решения уравнений, используя только арифметический способ. Правда, для этого порой приходится прибегать к гипотетическим допущениям. Рассмотрим такой пример.

Пример 3. Маша и Даша за день могут прополоть 3 грядки, Даша и Глаша — 4 грядки, а Глаша и Маша — 5 грядок. Спрашивается, сколько грядок за день смогут прополоть девочки, работая втроем?

Решение: Вообразим, что сначала Маша и Даша работали один день, затем Даша и Глаша работали один день, а потом Глаша и Маша работали еще один день. Получается, что каждая из девочек работала два дня или что бригада, состоящая из Маши, Глаши и Даши, прополола 3 + 4 + 5 = 12 грядок за два дня. Значит, за один день эта бригада прополет вдвое меньше грядок, т. е. 6.

Эту же задачу можно решить «нашим» способом, с помощью уравнений.

Обозначим $\frac{1}{t_м} = m$, $\frac{1}{t_д} = d$, $\frac{1}{t_г} = g$ и подставим в систему:

$$\begin{cases}\frac{1}{t_м}+\frac{1}{t_д}=\frac{3}{t_{совм}},\\ \frac{1}{t_г}+\frac{1}{t_д}=\frac{4}{t_{совм}},\\ \frac{1}{t_м}+\frac{1}{t_г}=\frac{5}{t_{совм}},\end{cases}\qquad \begin{cases}m+d=\frac{3}{t_{совм}},\\ g+d=\frac{4}{t_{совм}},\\ m+g=\frac{5}{t_{совм}},\end{cases}\ \begin{cases}m-g=\frac{3}{t_{совм}}-\frac{4}{t_{совм}}=-\frac{1}{t_{совм}},\\ m+g=\frac{5}{t_{совм}},\end{cases}$$

$$\begin{cases}m-g=-\frac{1}{t_{совм}},\\ m+g=\frac{5}{t_{совм}},\end{cases}\ 2m=\frac{5}{t_{совм}}-\frac{1}{t_{совм}}=\frac{4}{t_{совм}},\ \begin{cases}m=\frac{2}{t_{совм}},\\ g=\frac{3}{t_{совм}},\\ d=\frac{1}{t_{совм}}\end{cases}$$

Тогда втроем они выполнят работу за $t_{совм}=\frac{1}{\frac{2}{t_{совм}}+\frac{3}{t_{совм}}+\frac{1}{t_{совм}}}=\frac{t_{совм}}{6}$.

Из последнего уравнения видим, что единица объема работы равна 6.

Ответ 6.

Пример 4. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Решение: Составим для удобства таблицу:

	V (объем работы)	v (производительность)	t (время работы)
1-й рабочий	V	$\frac{V}{15}$	15
2-й рабочий	V	$\frac{V}{15}$	15
1-й рабочий	$3\cdot\frac{V}{15}$	$\frac{V}{15}$	3
Вместе	$V-\frac{3V}{15}=\frac{12V}{15}$	$\frac{V}{15}+\frac{V}{15}=\frac{2V}{15}$	$\frac{12V}{15}\div\frac{2V}{15}=6$

Учитывая, что 1-й рабочий проработал 3 часа, а вместе работу доделали за 6 часов. Общее время работы 3 + 6 = 9 часов.

Ответ 9.

Задачи на бассейны

Иногда в задачах на работу выделяют группу задач на трубы и бассейны, решение которых, вообще говоря, не имеет никаких специфических черт по сравнению с другими задачами на совместную работу. Математическая модель остается той же. Только рабочим будут соответствовать насосы разной производительности, а объему работы – объем бассейна или иного резервуара.

Пример 5. Первая труба пропускает 15 литров воды в минуту, а вторая – 10. За сколько минут обе трубы наполнят бассейн, объемом 100 литров?
Решение: Через 1 минуту из 1-й трубы нальется 15 литров, а из второй – 10. Значит, за минуту обе трубы наливают 15 + 10 = 25 литров. Тогда бассейн в 100 литров они наполнят за время 100 : 25 = 4 минуты.
Итак, *если дан объем резервуара и производительности работы труб (насосов), то время их совместной работы находят, разделив объем резервуара на совместную производительность труб:*

$$t_{совм} = \frac{V}{v_1 + v_2}.$$

Если в задаче объем резервуара в явном виде не задан, его иногда удобно принять равным единице:

$$t_{совм} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2} \text{ или } \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_{совм}}.$$

Пример 6. Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если бак, объемом 360 литров она заполняет на 10 минут медленнее, чем вторая труба?
Решение: Составим для удобства таблицу:

	V	v	t
1-я труба	360	v – 6	$\frac{360}{v-6}$
2-я труба	360	v	$\frac{360}{v}$

На 10 минут разница означает равенство:
$\frac{360}{v-6} = \frac{360}{v} + 10$, $|:10$; $\frac{36}{v-6} = \frac{36}{v} + 1$, $v(v-6) + 36v - 36\cdot 6 - 36v = 0$;
$v^2 - 6v - 216 = 0$; $v_1 = -12$ – не удовлетворяет условию, $v_2 = 18$.
В задаче спрашивается скорость работы первой трубы, т.е. 18 – 6 = 12 л/мин.
Ответ 12.

Тренировочные задачи

Пример 7. Двое рабочих выполнили работу за два дня. Если бы первый рабочий проработал 2 дня, а второй 1 день, то они вместе выполнили бы $\frac{5}{6}$ всей работы. За сколько дней выполнит эту работу первый рабочий?

Решение:

	V (объем работы)	v (производительность)	t (время работы)
Вместе	V = 1	x + y	$\frac{1}{x+y} = 2$
1-й рабочий	2x	x	2
2-й рабочий	1y	y	1

Обозначим всю работу за 1, производительность первого рабочего за x, а производительность второго рабочего за y. Тогда, совместная производительность равна x + y. А на выполнение всей работы им потребуется 1/(x +y) дней, по условию: $\frac{1}{x+y}=2$. За два дня первый рабочий сделает 2x, а второй рабочий – 1y, всего они выполнят 2x + y = 5/6. Получили систему: $\begin{cases} \frac{1}{x+y}=2 \\ 2x+y=\frac{5}{6} \end{cases}$. Решая эту систему, найдем производительности рабочих: $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{6}$. Тогда время, которое затратит первый рабочий на выполнение всей работы равно: $\frac{1}{x}=3$ дня.

Ответ 3.

Пример 8. Ученик прочел книгу в 480 страниц, ежедневно читая одинаковое количество страниц. Если бы он читал каждый день на 16 страниц больше, то прочел бы книгу на 5 дней раньше. Сколько дней ученик читал книгу?

Решение: Пусть ученик читал в день x страниц. Тогда он прочитал книгу за $\frac{480}{x}$ дней. Если бы он читал $x+16$ страниц в день, то он прочитал бы книгу за $\frac{480}{x+16}$ дней, что на 5 дней меньшею Получаем уравнение: $\frac{480}{x}=\frac{480}{x+16}+5$.

Решая его, находим, что ученик в день читал $x=32$ страницы и прочитал книгу за 15 дней.

Ответ: 15.

Пример 9. Двое рабочих выполнили работу менее, чем за 4 часа. Если бы первый выполнял ее в одночку, он сделал бы работу на 6 часов быстрее, чем второй. Какие значения может принимать время выполнения работы первым из рабочих, работающим отдельно?

Решение. Обозначим всю работу за 1, производительность первого рабочего за x, а производительность второго рабочего за y. Тогда, совместная производительность равна x + y. А на выполнение всей работы им потребуется $\frac{1}{x+y}$ дней, по условию: $\frac{1}{x+y}<4$. Время, за которое может выполнить работу первый рабочий выражается: $\frac{1}{x}$, а время второго: $\frac{1}{y}$. По условию: $\frac{1}{x}+6=\frac{1}{y}$. Итак, получили систему: $\begin{cases} \frac{1}{x+y}<4 \\ \frac{1}{x}+6=\frac{1}{y} \end{cases}$.

Так как производительность – величина положительная, то неравенства в системе равносильно следующему: $4x+4y>1$. Выразим x из уравнения и подставим в неравенство: $4x+\frac{4x}{1+6x}>1$. Решая это неравенство, получаем: $x>\frac{1}{4}$ или $x<-\frac{1}{3}$.

Условию соответствует первое неравенство. Следовательно, $\frac{1}{x}<4$.

Ответ: время выполнения работы первым из рабочих, работающим отдельно, может принимать значения, не большие 4.