Тема № 46 «Задачи по физике»

Овладеть математическими знаниями, позволяющими описывать окружающий нас мир, научиться составлять, анализировать и интерпретировать соответствующие математические модели — наиважнейшая цель математического образования.

Одними из самых простых и в то же время наиболее важными естественнонаучными задачами являются задачи на анализ функциональных зависимостей.

Язык функций — удобное средство мироописания, особенно распространённое в физике и химии.

Решение предложенных задач условно можно разделить на несколько шагов:

а) анализ условия и вычленение формулы, описывающей заданную ситуацию, а также значений параметров, констант или начальных условий, которые необходимо подставить в эту формулу;

б) математическая интерпретация задачи — сведение её к уравнению или неравенству и его решение;

в) анализ полученного решения.

Задачи, приводящие к линейным уравнениям или неравенствам

Пример 1. При температуре 0°С рельс имеет длину L_0 = 10 м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $L(t°) = L_0(1 + \alpha t°)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ (°С)$^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Решение: Задача сводится к решению уравнения $L(t°) - L_0 = 3$ (мм) при заданных значениях длины L_0 = 10 м и коэффициента теплового расширения $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ (°С)$^{-1}$:

$L(t°) - L_0 = 3\cdot10^{-3} \iff L_0(1 + \alpha t°) - L_0 = 3\cdot10^{-3} \iff L_0\alpha t° = 3\cdot10^{-3} \iff$
$10 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} t° = 3\cdot10^{-3} \iff t° = (3\cdot10^{-3}) : (1{,}2 \cdot 10^{-4}) \iff t° = 25°C$

Ответ 25.

Задачи, приводящие к квадратным уравнениям или неравенствам

Пример 2. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -0{,}01$ м$^{-1}$, $b = 1$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

Решение: Задача сводится к решению неравенства $y \geq 9$ при заданных значениях параметров a и b: $-0{,}01x^2 + x \geq 9 \iff x^2 - 100x + 900 \leq 0 \iff 10 \leq x \leq 90$ м.

Камни будут перелетать крепостную стену на высоте не менее 1 метра, если камнеметательная машина будет находиться на расстоянии от 10 до 90 метров от этой стены. Наибольшее расстояние — 90 метров.
Ответ 90.

Пример 3. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$$

где m — масса воды в килограммах, v —скорость движения ведёрка в м/с, L— длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте g = 10 м/с^2). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,441 м? Ответ выразите в м/с.

Решение: Задача сводится к решению неравенства $P(v) \geq 0$ при заданной длине веревки L = 0,441 м:

$P \geq 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) \geq 0$ |:m>0 $\Leftrightarrow \frac{v^2}{0{,}441} - 10 \geq 0$ $\Leftrightarrow v^2 \geq 4{,}41$ $\Leftrightarrow v \geq 2{,}1$ м/с.

Ответ 2,1.

Пример 4. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону

$$h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

Решение: Формулой, описывающей изменение высоты мяча с течением времени, является $h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2$. В эту формулу не требуется подставлять значения параметров или констант.

Условие «мяч находится на высоте не менее трёх метров» эквивалентно неравенству $h(t) \geq 3$: $1{,}6 + 8t - 5t^2 \geq 3$; $5t^2 - 8t + 1{,}4 \leq 0$; $0{,}2 \leq t \leq 1{,}4$.

Проанализируем полученный результат: мяч будет находиться на указанной высоте в период времени от 0,2 до 1,4 секунды, т. е. в течение 1,2 секунды.
Ответ 1,2.

Пример 5. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4,$$

где t — время (в минутах), прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Решение. Формулой, описывающей уменьшение высоты столба воды с течением времени, является $H(t) = 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4$, в эту формулу не требуется подставлять значения параметров или констант.
Вода будет вытекать из бака, пока её уровень не понизится до нуля или буде больше нуля. Определим требуемое на это время, решая неравенство

$H(t) \geq 0$: $\quad 0{,}01t^2 - 0{,}4t + 4 \geq 0; \quad t^2 - 40t + 400 \geq 0; \quad (t - 20)^2 \geq 0.$

Проанализируем полученный результат: неравенству удовлетворяют все значения переменной t. Это означает, что высота столба не может стать отрицательной ни в какой момент времени. Нулевого значения высота столба воды достигает при $t=20$. Таким образом, столб воды опустится до нуля за 20 минут.
Ответ 20.

Задачи, приводящие к степенным уравнениям или неравенствам.

Пример 6. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma=5{,}7\cdot10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{16}\cdot 10^{20}\text{м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $9{,}12\cdot10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $P \geq 9{,}12\cdot10^{25}$ при известном значении постоянной $\sigma=5{,}7\cdot10^{-8}$ и заданной площади звезды $S = \frac{1}{16}\cdot 10^{20} м^2$:

$$\sigma S T^4 \geq 9{,}12\cdot10^{25} \quad \Leftrightarrow \quad T^4 \geq (9{,}12\cdot10^{25})/\,\sigma S \quad \Leftrightarrow \quad T \geq \sqrt[4]{\frac{9{,}12\cdot10^{25}}{5{,}7\cdot10^{-8}\cdot\frac{1}{16}\cdot10^{20}}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad T \geq \sqrt[4]{256\cdot10^{12}} = 4000\ \text{К}.$$

Ответ 4000.

Пример 7. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выраженная в ньютонах, будет определяться по формуле:

$$F_A = \rho g L^3,$$

где $\rho = 1000$ кг/м^3—плотность воды, L—длина ребра куба в метрах, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9{,}8$ м/с^2). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить эксплуатацию аппарата в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 78 400 Н? Ответ выразите в метрах.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $F_A \leq 78\,400$ при заданных значениях плотности воды и ускорении свободного падения:

$1000 \cdot 9{,}8 \cdot L^3 \leq 78\,400 \iff L^3 \leq 8 \iff L \leq 2$ (м).

Ответ 2 м.

Задачи, приводящие к рациональным уравнениям или неравенствам

Пример 8. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой f_0 = = 440 Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а c = 315 м/с. Ответ выразите в м/с.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $f(v) - f(v_0) \geq 10$ при известном значении постоянной f_0 = = 440 Гц:

$$\frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} - f_0 \geq 10 \quad \leftrightarrow \quad \frac{440}{1 - \frac{v}{315}} - 440 \geq 10 \quad \leftrightarrow \quad 1 - \frac{v}{315} \leq \frac{44}{45} \quad \leftrightarrow \quad v \geq \frac{315}{45} = 7\frac{м}{c}$$

Ответ 7.

Пример 9. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием f = 30 см. Расстояние d_1 , от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Решение. Поскольку f = 30, имеем:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{30} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$$

Наименьшему возможному значению d_1 соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства, и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наи-

большего значения при наименьшем значении вычитаемого $\frac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя d_2. Поэтому d_2 =180, откуда $\frac{1}{d_1}=\frac{1}{30}-\frac{1}{180} \leftrightarrow \frac{1}{d_1}=\frac{5}{180} \leftrightarrow \frac{1}{d_1}=\frac{1}{36} \leftrightarrow d_1=36$ *см*.
По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 30 до 50 см от линзы. Найденное значение d_1 = 36 см удовлетворяет условию.
Ответ 36.

Задачи, приводящие к иррациональным уравнениям или неравенствам

Пример 10. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной L (в километрах) с постоянным ускорением *a* (в км/ч^2), вычисляется по формуле

$$v=\sqrt{2La}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

Решение. Найдём, при каком ускорении автомобиль достигнет требуемой скорости, проехав один километр. Задача сводится к решению уравнения $\sqrt{2La}=100$ при известном значении длины пути L = 1 км:

$$\sqrt{2La}=100 \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{2a}=100 \quad \leftrightarrow \quad 2a = 10\,000 \quad \leftrightarrow \quad a = 5\,000 \text{ км/ч}^2.$$

Если его ускорение будет превосходить найденное, то, проехав один километр, автомобиль наберёт большую скорость, поэтому наименьшее необходимое ускорение равно 5000 км/ч^2.
Ответ 5000.

Пример 11. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$L=L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где L_0 = 10 м — длина покоящейся ракеты, $c = 3\cdot10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 8 м? Ответ выразите в км/с.

Решение. Найдём, при какой скорости длина ракеты станет равна 8 м. Задача сводится к решению уравнения

$$L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=8$$

при заданном значении длины покоящейся ракеты L_0 = 10 м и известной величине скорости света $c = 3\cdot10^5$ км/с:

$$10\sqrt{1-\frac{v^2}{9\cdot 10^{10}}}=8 \quad \leftrightarrow \quad \frac{v^2}{9\cdot 10^{10}}=\frac{36}{100} \quad \leftrightarrow \quad v=\frac{6}{10}\cdot 3\cdot 10^5 \quad \leftrightarrow \quad v = 180\,000 \text{ км/с.}$$

Если скорость будет превосходить найденную, то длина ракеты будет менее 8 метров, поэтому минимальная необходимая скорость равна 180000 км/с.
Ответ 180 000.

Задачи, приводящие к показательным уравнениям или неравенствам

Пример 12. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T— период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее m_0 = 40 мг изотопа азота-13, период полураспада которого T = 10 мин. В течение скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 10 мг?

Решение. Задача сводится к решению неравенства $m(t) \geq 10$ при заданных значениях параметров m_0 = 40 мг и T = 10 мин:

$40\cdot 2^{-t/10} \geq 10 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{-t/10} \geq 2^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{t}{10} \geq -2 \quad \Leftrightarrow \quad t \leq 20$ мин.

Ответ 20.

Пример 13. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const}$$

где p (Па)—давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него к = 5/3) из начального состояния, в котором const = 10^5 Па · $м^5$, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $3{,}2 \cdot 10^6$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $p(V) \geq 3{,}2\cdot 10^6$ при заданных значениях параметров к = 5/3 и const = 10^5 Па·$м^5$:

$10^5 \cdot V^{-5/3} \geq 3{,}2\cdot 10^6 \quad \Leftrightarrow \quad V^{-5/3} \leq \frac{1}{32} \quad \Leftrightarrow \quad V \leq \left(\frac{1}{32}\right)^{3/5} \quad \Leftrightarrow \quad V \leq \frac{1}{8}\ м^3.$

Ответ 0,125.

Задачи, приводящие к логарифмическим уравнениям или неравенствам

Пример 14. Для обогрева помещения, температура в котором $T_п$ = 20°C, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_в$ = 60°C. Через радиатор проходит m = 0,3 кг/с воды. Проходя по радиатору расстояние x = 84 м, вода охлаждается до температуры T(°C), причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \mathrm{Log}_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п}$$

где с = 4200 Дж/кг·ºС – теплоемкость воды, γ =21 Вт/ºС - коэффициент теплообмена, а α = 0,7 — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?

Решение. Задача сводится к решению уравнения x = 84 при заданных значениях теплоёмкости, коэффициента теплообмена и постоянной α:

$$\alpha\frac{cm}{\gamma}\mathrm{Log}_2\frac{T_в-T_п}{T-T_п}=84 \quad <=> \quad 70{,}7\frac{4200\cdot0{,}3}{21}\mathrm{Log}_2\frac{60-20}{T-20}=84 \quad <=> \quad \mathrm{Log}_2\frac{40}{T-20}=2$$

$$<=> \quad \frac{40}{T-20}=4 \quad <=> \quad T-20=10 \quad <=> \quad T=30\ ºC.$$

Ответ 30.

Пример 15. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий ν = 4 моля воздуха при давлении p_1 = 1,2 атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A=\alpha\nu T\mathrm{Log}_2\frac{p_2}{p_1}$$

где α = 5,75— постоянная, T = 300 К—температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 (в атм) можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 20 700 Дж?

Решение. Задача сводится к решению неравенства A ≤ 20 700 при заданных значениях количества воздуха, его начального давления и температуры, а также постоянной α:

$$\alpha\nu T\mathrm{Log}_2\frac{p_2}{p_1}\le 20\,700 \quad <=> \quad 5{,}75\cdot4\cdot300\cdot\mathrm{Log}_2\frac{p_2}{1{,}2}\le 20\,700 \quad <=> \mathrm{Log}_2\frac{p_2}{1{,}2}\le 3$$

$$<=> \quad 0<\frac{p_2}{1{,}2}\le 8 \quad <=> \quad 0< p_2\le 9{,}6\,.$$

Ответ 9,6.

Задачи, приводящие к тригонометрическим уравнениям или неравенствам

Пример 16. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 3 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью v_0 = 30 м/с? Считайте, что ускорение свободного падения *g* = 10 м/с^2.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $t(\alpha) \geq 3$ на интервале (0º;90º) при заданных значениях начальной скорости v_0 = 30 м/с и ускорения свободного падения g = 10 м/с^2:

$\frac{2 \cdot 30 \cdot \sin\alpha}{10} \geq 3$ <=> $\sin\alpha \geq \frac{1}{2}$ <=> $30º \leq \alpha < 90º$.

Ответ 30.

Пример 17. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью v = 3 м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m + M} v\cos\alpha$$

где m = 80 кг — масса скейтбордиста со скейтом, а M = 400 кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,25 м/с?

Решение. Задача сводится к решению неравенства $u \geq 0{,}25$ на интервале (0°; 90°) при заданных значениях массы скейтбордиста m = 80 кг и массы платформы M = 400 кг:

$\frac{m}{m+M} v\cos\alpha \geq 0{,}25$ <=> $\frac{80}{80+400} \cdot 3 \cdot \cos\alpha \geq 0{,}25$ <=> $\frac{1}{2}\cos\alpha \geq \frac{1}{4}$ <=> $0º < \alpha \leq 60º$.

Ответ 60.

Пример 18. Трактор тащит сани с силой F = 80 кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора, выраженная в килоджоулях, на участке длиной S = 50 м равна

$$A = FS\cos\alpha.$$

При каком максимальном угле α (в градусах) совершённая работа будет не менее 2000 кДж?

Решение. Задача сводится к решению неравенства $A \geq 2000$ на интервале (0°; 90°) при заданных значениях силы F = 80 кН и длины пути S = 50 м:

$80 \cdot 50 \cdot \cos\alpha \geq 2000$ <=> $\cos\alpha \geq 0{,}5$ <=> $0º < \alpha \leq 60º$.

Ответ 60.

Пример 19. Катер должен пересечь реку шириной L = 100 м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки u = 0,5 м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега. Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 200 с? Ответ дайте в градусах.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $t \le 200$ на интервале (0°; 90°) при заданных значениях ширины реки L = 100 м и скорости течения u = 0,5 м/с:

$\frac{L}{u}\text{ctg}\alpha \le 200$ <=> $\frac{100}{0,5}\text{ctg}\alpha \le 200$ <=> $\text{ctg}\alpha \le 1$ <=> $45^\circ \le \alpha < 90^\circ$.

Ответ 45.