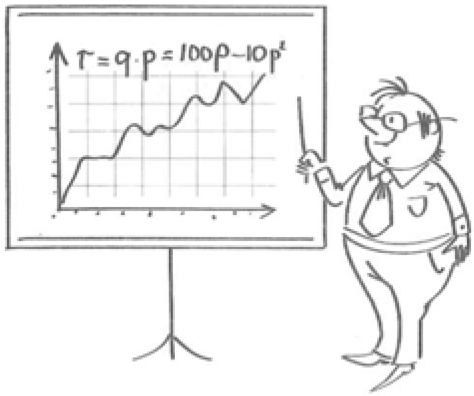
Тема №47 «Комбинированные задачи»

В данном разделе мы рассмотрим задачи, которые, либо не относятся ни к одному типу в уже рассмотренных разделах, либо сочетают в себе элементы задач нескольких типов.

Сначала рассмотрим задачи ЕГЭ типа B12, в которых присутствует и функция, и формула. В таких задачах кроме основной переменной присутствуют дополнительные неизвестные, значения которых надо искать где-то в тексте или по смыслу, опираясь на физическое или статистическое явление и логику.

Пример 1. Зависимость объёма спроса *q* на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 100 - 10p$.

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p, при котором месячная выручка r(p) составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.



Решение: Задача сводится к решению неравенства $r(p) \geq 240$:

$$r(p) = q \cdot p = (100 - 10p)p = 100p - 10p^2,$$

$$10p^2 - 100p + 240 \leq 0 \iff p^2 - 10p + 24 \leq 0 \iff 4 \leq p \leq 6.$$

Так как требуется максимальный уровень цены, при котором месячная выручка составит не менее 240 тыс. руб., то выбираем значение p = 6.

Ответ 6.

Пример 2. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону:

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$$

где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = 1/50$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

Решение: Для начала выясним, чему равно искомое H(t). По условию, в баке должна остаться четверть первоначального объема воды. Поэтому H(t) = (1/4) · 20 = 5 м. Теперь, когда все параметры известны, подставим числа в функцию:

$5 = 20 - \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20} \cdot \frac{1}{50} t + \frac{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^2 t^2,\qquad 5 = 20 - \frac{20}{50} t + \frac{5}{2500} t^2,$

$\frac{1}{500} t^2 - \frac{2}{5} t + 15 = 0 | \cdot 500,\qquad t^2 - 200t + 7500 = 0,$ $t_1 = 50$, $t_2 = 150$.

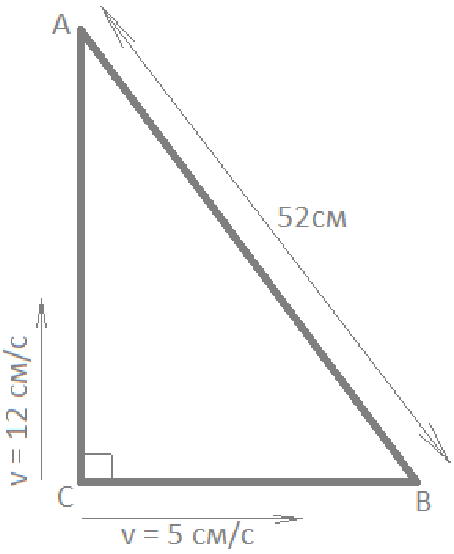
Итак, у нас два кандидата на ответ: числа 50 и 150. Заметим, что в момент времени t = 100 высота столба воды равна:

$H(100) = 20 - 20 \cdot (1/50) \cdot 100 + 5 \cdot (1/50)^2 \cdot 100^2 = 20 - 40 + 20 = 0.$

Другими словами, через t = 100 секунд вода полностью вытечет из бака, и уравнение H(t) теряет физический смысл. Поэтому вариант t = 150 нас не интересует. Остается только t = 50.

Ответ 50.

Рассмотрим задачу с геометрическим содержанием.



Пример 3. От вершины прямого угла по его сторонам одновременно начинают движение две материальные точки со скоростями 5 см/с и 12 см/с. Через какое время расстояние между ними станет 52 см?

Решение: Применим теорему Пифагора к условию задачи:

$AB^2 = AC^2 + BC^2,$

$52^2 = (12t)^2 + (5t)^2,$

$52^2 = (25 + 144)t^2,$

$t^2 = 52^2/13^2,$

$t = 52/13 = 4$ (с).

Ответ 4.

Следующую задачу по условию можно отнести к задачам «на работу», а по решению – к задачам «на числа и проценты».

Пример 4. Два завода по плану должны были выпустить за месяц 360 станков. Первый завод выполнил план на 112%, а второй – на 110%, вместе заводы выпустили за месяц 400 станков. Сколько станков сверх плана выпустил каждый завод в отдельности?

Решение: Пусть Х станков должен выпустить первый завод, а У – второй.

	По плану	Фактически
Первый завод	$\left.\begin{matrix} X \\ У \end{matrix}\right\} 360$	$\left.\begin{matrix} 1{,}12X \\ 1{,}1У \end{matrix}\right\} 400$
Второй завод		

$\begin{cases} X + У = 360, \\ 1{,}12X + 1{,}1У = 400, \end{cases}\qquad \begin{cases} X = 360 - У, \\ 1{,}12(360 - У) + 1{,}1У = 400, \end{cases}$

Решим второе уравнение: 403,2 – 1,12У +1,1У = 400; 3,2 = 0,02У; У = 160.

Тогда X = 360 – 160 =200. Итак, первый завод по плану должен выпустить 200 станков, а второй завод – 160. Но в задаче спрашивается сколько станков сверх плана выпустил каждый из заводов. Первый завод выпустил на 12% больше, чем по плану, т.е. $200 \cdot 0{,}12 = 24$ станка, второй на 10% перевыполнил план, т.е. $160 \cdot 0{,}1 = 16$ станков. Ответ 24, 16.

Следующая задача сочетает в себе такие типы задач как «на совместную работу и производительность» и «на проценты».

Пример 5. На угольной шахте сначала работали два участка, а через некоторое время вступил в работу третий участок. В результате производительность труда повысилась на 50%. Сколько процентов составляет производительность 2-го участка от производительности 1-го участка, если за 4 месяца работы 1-й и 3-й участки выдают угля столько же, сколько 2-й участок за 1 год.

Решение: Пусть v_1, v_2, v_3 – производительности соответственно 1-го, 2-го и 3-го участков. Составим систему уравнений, опираясь на условие задачи:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = v_1 + v_2 + 0{,}5(v_1 + v_2), \\ 4v_1 + 4v_3 = 12v_2 \mid : 4, \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 1{,}5(v_1 + v_2), \\ v_1 + v_3 = 3v_2\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + 3v_2 - v_1 - 1{,}5v_1 - 1{,}5v_2 = 0, \\ v_3 = 3v_2 - v_1, \end{cases}$$

$2{,}5v_2 = 1{,}5v_1$, $v_2 : v_1 = 1{,}5 : 2{,}5 = 0{,}6 = 60\%$.
Ответ 60%.

Следующая задача на первый взгляд кажется задачей на движение навстречу, но решается она немного сложнее.

Следующую задачу разберем, т.к. она не вошла ни в один из изученных типов.

Пример 6. За самостоятельную работу ученикам выставили оценки: «2», «3», «4», «5». Оценки «2», «3» и «5» получили одинаковое число учеников, а «4» поставлено больше, чем всех остальных, вместе взятых. Оценки выше «3» получили менее 10 учеников. Сколько «3» и сколько «4» было поставлено, если писали работу не менее 12 учеников и каждый писавший получил оценку?

Решение: Пусть число учеников, получивших оценку «2» – x, «3» – y, «4» – z, «5» – t. Тогда получим систему неравенств и уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z + t \geq 12, \\ z + t < 10, \\ z > x + y + t, \\ x = y = t, \end{cases} \quad \begin{cases} t + t + z + t \geq 12, \\ z + t < 10, \\ z > t + t + t, \\ x = y = t, \end{cases} \quad \begin{cases} z + 3t \geq 12, \\ z - 3t > 0, \\ z + t < 10, \end{cases} \quad \begin{cases} 2z > 12, \\ z > 3t, \\ z + t < 10, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z > 6, \\ z > 3t, \\ z + t < 10, \end{cases} \quad \begin{cases} z > 6, \\ t \geq 2, \\ z < 10 - t, \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq 2, \\ 6 \leq z \leq 8. \end{cases}$$

Пусть t =2, тогда z =7. Проверим, подставив во вторую систему:

$$\begin{cases} 7 + 3 \cdot 2 = 13 \geq 12, \\ 7 + 2 < 10, \\ 7 > 3 \cdot 2. \end{cases}$$

Итак, оценки «2», «3» и «5» получили по 2 ученика, «4» – 7 учеников.

Ответ 2,7.

В следующей задаче встретились три типа задач сразу: «движение по окружности», «движение навстречу», «движение вдогонку».

Пример 7. По окружности, имеющей длину 1350 м, в одном направлении едут два велосипедиста. Первый обгоняет второго каждые 27 минут. При движении в противоположных направлениях они встречаются каждые 3 минуты. Найти скорости велосипедистов (в км/ч).

Решение: Пусть v_1 и v_2 – скорости велосипедистов. За 27 мин = 0,45ч они проедут пути соответственно $0{,}45v_1$ км и $0{,}45v_2$ км. Причем первый проедет на длину окружности (1350 м = 1,35 км) больше второго, т.е.

$$0{,}45v_1 - 0{,}45v_2 = 1{,}35 \,|\, :0{,}45.$$

За 3 мин = 0,05ч они проедут пути соответственно $0{,}05v_1$ км и $0{,}05v_2$ км. А вместе они проедут расстояние, равное длине полной окружности, т.е.

$$0{,}05v_1 + 0{,}05v_2 = 1{,}35 \,|\, :0{,}05.$$

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = 3, \\ v_1 + v_2 = 27, \end{cases} \quad \begin{cases} 2v_1 = 30, \\ v_2 = v_1 - 3, \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 15, \\ v_2 = 12, \end{cases}$$

Итак, скорость первого велосипедиста 15 км/ч, второго - 12 км/ч.

Ответ 15,12.

Пример 8. Мальчики составляют 45% всех учащихся школы. Известно, что 30% мальчиков и 40% девочек учатся без троек. Сколько процентов всех учащихся школы учатся без троек?

Решение: Пусть в школе x учащихся. Тогда в ней $0{,}45x$ мальчиков и $0{,}55x$ девочек. Без троек учатся $0{,}3\cdot0{,}45x = 0{,}135x$ мальчиков и $0{,}4\cdot0{,}55x = 0{,}22x$ девочек. А всего $0{,}135x + 0{,}22x = 0{,}355x$. Или 35,5% учащихся школы учатся без троек.

Ответ 35,5.

Пример 9. В одном государстве правительство вынесло на всенародное голосование проект закона о запрете рекламы спиртных напитков. Этот проек поддержали 69% всего взрослого населения, принявшего участие в голосовании, причем среди женщин 94%, а среди мужчин 41%. Кого среди голосовавших было больше: мужчин или женщин?

Решение: Пусть в голосовании приняли участие x женщин и y мужчин.
Постановление поддержали $0{,}94x$ женщин и и $0{,}41y$ мужчин, а всего $0{,}69(x + y)$ человек.: $0{,}94x + 0{,}41y = 0{,}69(x + y)$. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые: $0{,}25x = 0{,}28y$. Отсюда следует, что $x > y$.

Ответ женщин было больше.

Пример 10. Сын младше отца в 7 раз, а через год он станет младше отца в 6 раз. Через сколько лет сын станет младше отца в 4 раза?

Решение: Если возраст сына равен X, то возраст отца равен $7X$, и через год им будет соосветственно $X + 1$ и $7X + 1$ лет. По условию задачи, $7X + 1 = 6(X + 1)$, откуда $X = 5$, $7X = 35$. Если сын станет младше отца в 4 раза через n лет, то $35 + n = 4(5 + n)$, откуда $n = 5$.

Ответ 5.

Пример 11. Сыну 2 года, а отцу 28 лет. Сколько еще раз в течение их жизни сын будет младше отца в целое число раз, если отец проживет ровно 100 лет?

Решение: Каждый раз, когда сын младше отца в целое число k раз, разность их возрастов также в целое число раз больше возраста сына, и поэтому требуется найти, сколько существует натуральных чисел от 2 до 72, при которых число k + 2 является делителем числа 26. Так как 26 имеет 2 делителя, больших 2 (13 и 26), то событие, о котором идет речь в условии задачи, случится 2 раза.
Ответ 2.

Пример 12. Группа из 30 студентов на экзамене получила оценки «2», «3», «4», «5», причем общая сумма баллов равнялась 93. Троек было больше, чем пятерок, и меньше, чем четверок. Число четверок делилось на 10, число пятерок было четным. Сколько пятерок было получено?

Решение: Из условия следует, что вклад четверок в общую сумму равен либо 40, либо 80. Но вклад пятерок не меньше 10, а так как троек больше, чем пятерок, то их вклад не меньше 9, и общая сумма не меньше 99, что неверно, так что четверок 10, а тогда пятерок 2, 4, 6 или 8.

Если пятерок 8, то троек 9, а 40 + 27 + 40 > 93, что опять неверно. Если их 6, то вклад двоек и троек равен 23, но троек не меньше 7, тогда их ровно 7, а двойка одна. Но общее число оценок в этом случае равно 1 + 7 + 10 + 6 = 24, что неверно, так что число пятерок не равно 6.

Если пятерок 4, то то вклад двоек и троек равен 33, вместе их 30 – 10 – 4 = 16, причем троек не меньше 5. Если их 5, то двоек 11, и общий вклад двоек и троек равен 27, а при каждом увеличении числа троек на 1 и соответствующем уменьшении на 1 числа двоек получатся вклады 28, 29, 30, 31, меньшие 33.

Следовательно пятерок было получено 2.
Ответ 2.

Пример 13. Имеются путевки трех типов, которые стоят соответственно 4,6 и 9 неразменных батов. Путевка 1-го типа расчитана на 8 дней, второго – на 14, и 3-го – на 20 дней отдыха. Сколько путевок каждого типа можно купить на 100 батов, чтобы общее число дней было наибольшим?

Решение: За 36 батов можно купить соответственно 9, 6 и 4 путевок разных типов, а отдохнуть соотвественно 72, 84 и 80 дней. Так что по «убыванию выгодности» типы путевок располагаются так: 2-й, 3-й, 1-й.

Поэтому вместо 3 путевок 1-го типа на те же деньги можно купить 2 путевки 2-го типа и тем самым увеличить число дней отдыха. Иными словами, в нужной покупке число путевок 1-го типа не больше 2. Точно так же на 18 батов можно купить 3 путевки 2-го типа или 2 путевки 3-го типа. Однако второй вариант хуже, так что путевок 3-го типа надо покупать не более одной. Но если купить одну, то на остальные путевки придется 91 батов, а это число нечетно, тогда как каждая из этих путевок стоит четное число батов, так что путевок 3-го типа вообще не следует покупать.

Поэтому на 100 батов надо как можно больше купить путевок 2-го типа, а поскольку их стоимость должна делиться на 6, то их нужно купить 16, а на оставшиеся 4 бата – одну путевку 1-го типа.
Ответ 16 путевок 2-го типа и одну – 1-го.
Пример 14. На факультет от выпускников лицеев подано на 600 заявлений больше, чем от выпускников гимназий. Девушек среди выпускников лицеев в 5 раз больше, чем девушек среди выпускников гимназий. А юношей среди выпускников лицеев больше, чем юношей среди выпускников гимназий в n раз, причем $6 \le n \le 12$ (n-целое число). Определить Общее количество заявлений, если среди выпускников гимназий юношей на 20 больше, чем девушек.

Решение: Обозначим число девушек-гимназисток через X и заполним таблицу:

Дев -гимназистки	Юноши-гимназисты	Девушки из лицея	Юноши и з лицея
X	X + 20	5X	n (X + 20)

По первому условию задачи, $5X + n(X + 20) = X + X + 20 + 620$, $nX + 3X + 20n = 620$, $X(n + 3) + 20(n + 3) = 680$, $(X + 20)(n + 3) = 680$.
Поскольку $6 \le n \le 12$, $9 \le n + 3 \le 15$, а $680 = 17 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$.
Как нетрудно заметить, имеет место только один делитель от 9 до 15 – число 10, так что n =7, X + 20 = 680 :10 = 68, X = 48.
Общее число заявлений равно $7X + 20 + 7(X + 20) = 14 \cdot 18 + 160 = 832$.
Ответ 832.
Пример 15. Абитуриенты в течение трех дней сдавали экзамены в одних и тех же аудиториях. Число абитуриентов, экзаменовавшихся каждый день в каждой из аудиторий, было равным чуслу аудитроий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести за 2 дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу используемых аудиторий. Найти минимальное возможное число абитуриентов, которое могло быть проэкзаменовано при этих условиях.

Решение: Пусть Х и У – число аудиторий в первом и втором корпусах. Тогда в каждой аудитории экзаменовалось Х абитуриентов, так что всего абитуриентов было $3X^2$, а во втором варианте проведения экзамена в каждой из У аудиторий экзаменовалось бы $У^2$ человек, и следовательно, абитуриентов было $2У^3$, и таким образом, $3X^2 = 2У^3$.
Отсюда следует, что Х делится на 2, а У делится на 3, т.е.
$X = 2a$, $Y = 3b$, $12a^3 = 54b^3$, $2a^2 = 9b^3$,
$a = 3c$, $b = 1d$, $18c^2 = 72d^3$, $c^2 = 4d^3$,
$c = 2p$, $4p^2 = 4d^3$, $p^2 = d^3$.
Наименьшие числа, удовлетворяющие этому равенству – это p = d = 1. Далее получаем c = 2, $a = 6$, X = 12, $3X^2 = 432$.
Ответ 432.

Пример 16. В конференции принимает участие 77 человек. Может ли каждый из них быть знаком ровно с семью другими?

Решение: Перенумеруем мысленно всех участников конференции и сделаем «список знакомств», а «знакомством» будем считать пару чисел, являющихся номерами людей, знакомых друг с другом. Список организуем так: сначала пойдут семь «знакомств» первого по порядку участника, затем семь «знакомств» второго и т.д. Так как каждый человек знаком ровно с семью другими, то всего имеется $77 \cdot 7$ «знакомств», но каждое «знакомство» в этом списке появится ровно 2 раза – так как мы не считаем человека «знакомым с самим собой», то в каждой паре номера различны. Поэтому число $77 \cdot 7$ должно делиться на 2, а это неверно. Значит, ситуация, описанная в задаче невозможна.
Ответ не может.