Тема 48 «Поочередный и одновременный выбор»

Наука, изучающая способы составления и количество множеств и их подмножеств, называется ***комбинаторикой.***

Каждое конкретное подмножество, составленное из элементов данного конечного множества, называется ***соединением*** *или* ***выборкой.***

Если во множестве определено, какой элемент множества за каким следует или какому предшествует, то множество называется ***упорядоченным*****.** Если в упорядоченном множестве изменить расположение элементов, то мы получим другое, отличное от первого множество.

Выборка – результат отбора, извлечение предпочитаемого из наличного.

Комбинаторная задача состоит в подсчете числа выборок из конечного основного множества элементов $M = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$.

Выборки отличаются объемом (т.е. числом элементов, которые надо выбрать), порядком (т.е. упорядоченные или неупорядоченные выборки) и повторениями (есть или нет в выборке повторяющиеся элементы).

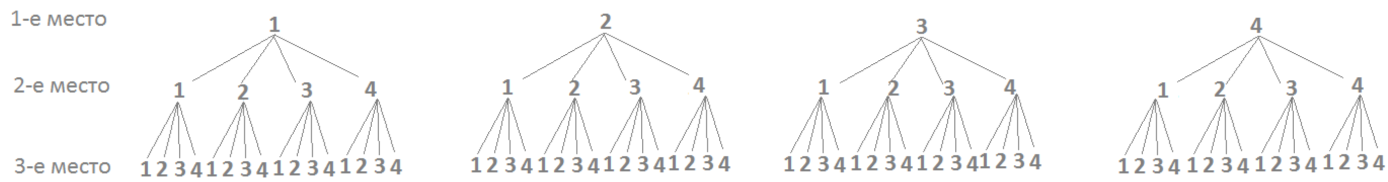
Мы знаем три основных вида соединений: размещения, перестановки и сочетания.

Упорядоченные выборки. (Поочередный выбор).

Размещения с повторениями.

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из 4 цифр: 1, 2, 3, 4? (Другая формулировка задачи: сколько возможностей составить трехбуквенные «слова» из четырех одинаковых букв?)

Решение: Перечислим с помощью схемы все возможные числа:



Видим, что всего данных чисел $4^3 = 64$, где 4 – количество элементов исходного множества, а 3 – число выбранных элементов.

Заметим, что в примере 1 элементы основного множества, т.е. все цифры, различны для удобства. Для второй формулировки задачи, нам бы пришлось данные буквы занумеровать и получить в точности первую формулировку задачи.

Данный пример является иллюстрацией к следующему понятию:

Размещениями из *n* элементов по *k* называются упорядоченные выборки, каждe из которых содержит *k* элементов из *n* данного множества. Размещения отличаются друг от друга либо порядком элементов, либо самими элементами.

Если некоторые элементы данного множества могут повторяться в размещении, то такие размещения называются *кортежами* или *размещениями с повторениями.* Число элементов в размещении называют его длиной.

Размещениями с повторениями *называют упорядоченную выборку, состоящую из n не обязательно различных элементов.*

Пусть дано множество $M = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$. Сколько кортежей длины k можно составить из n элементов этого множества?

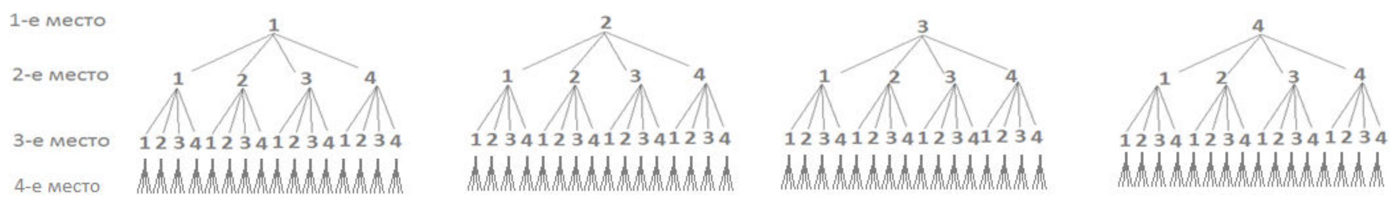
Решение: Первый элемент каждого кортежа мы можем выбрать n способами, записав на первое место любой из n элементов. Второй элемент тоже можно выбрать n способами и т. д. Значит, общее число кортежей из множества n элементов, по k элементов в каждом, будет равно n^k. Число кортежей из n по k *с учетом их порядка* обозначается $\overline{A_n^k}$, и называют ***числом размещений с повторениями из n элементов по k:*** $\overline{\mathrm{A}_\mathrm{n}^\mathrm{k}} = \mathrm{n}^\mathrm{k}$.

В примере 1: $\overline{\mathrm{A}_4^3} = 4^3 = 64$.

Перестановки с повторениями.

Пример 2. Сколько четырехзначных чисел можно составить из 4 цифр: 1, 2, 3, 4? (Другая формулировка задачи: сколько возможностей составить четырехбуквенные «слова» из четырех одинаковых букв?)

Решение: Перечислим с помощью схемы все возможные числа:



Видим, что всего данных чисел $4^4 = 256$.

Заметим, что в примере 3 элементы основного множества, т.е. все цифры, различны для удобства. Для второй формулировки задачи, нам бы пришлось данные буквы занумеровать и получить в точности первую формулировку задачи.

Данный пример является иллюстрацией к следующему понятию, которое является частным случаем, когда наше основное множество состоит из различных элементов:

Размещения с повторениями из n не обязательно различных элементов основного множества по n принято называть ***перестановками с повторениями***. Число перестановок с повторениями обозначают $\overline{P_n}$.

Заметим, $\overline{\mathrm{A}_\mathrm{n}^\mathrm{n}} = \overline{P_n}$. Общее число перестановок с повторениями из *n* элементов равно $\overline{P_n} = n^n$.

В примере 2: $\overline{P_4} = 4^4 = 256$.

Пример 3. Сколько семизначных чисел можно составить из 7 цифр: 1; 1; 2; 2; 2; 3; 4?

Решение: Заметим, что «1» повторяется 2 раза, «3» – три раза, а «3» и «4» – по одному. На этот случай существует другая формула перестановок с повторениями.

В общем случае, когда в нашем основном множестве какие-то элементы могут повторяться используют понятие:

Перестановкой с повторениями состава $(\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \dots, \mathrm{k}_\mathrm{n})$ из букв $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ называют любой кортеж длины $\mathrm{k} = \mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2 + \dots + \mathrm{k}_\mathrm{n}$, в который буква a_1 входит k_1 раз, буква a_2 входит k_2 раз,…, буква a_n входит k_n раз. Число таких перестановок обозначают $\mathrm{P}(\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \dots, \mathrm{k}_\mathrm{n})$ и вычисляют по формуле:

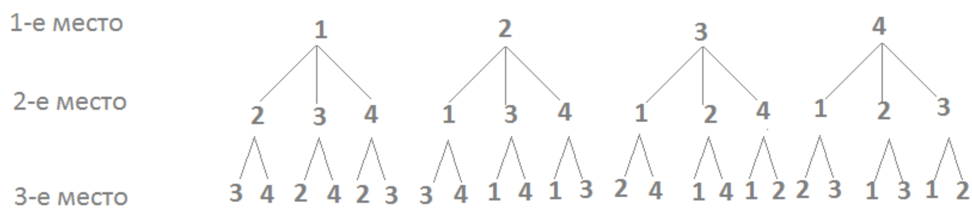
$$\mathrm{P}(\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \dots, \mathrm{k}_\mathrm{n}) = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{k}_1!\,\mathrm{k}_2! \dots \mathrm{k}_\mathrm{n}!} = \frac{(\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2 + \dots + \mathrm{k}_\mathrm{n})!}{\mathrm{k}_1!\,\mathrm{k}_2! \dots \mathrm{k}_\mathrm{n}!}$$

В примере 3: $\mathrm{P}(2,3,1,1) = \frac{7!}{2!3!1!1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!3!} = 420.$

Размещения без повторений (Размещения).

Пример 4. Сколько трехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из 4 цифр: 1, 2, 3, 4? (Другая формулировка задачи: сколько возможностей составить трехбуквенные «слова» из четырех букв А, Б, В, Г, различающихся хотя бы одной буквой?)

Решение: Перечислим с помощью схемы все возможные числа:



Видим, что всего данных чисел 4·3·2 = 24.

Данный пример является иллюстрацией к следующему понятию:

Пусть множество $M = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$. Сколько размещений без повторения элементов, по k элементов в каждом, можно составить из элементов этого множества?

Р е ш е н и е : На первое место можно записать любой элемент из М. Значит, имеем n возможностей. На второе место — любой элемент, кроме выбранного на первое место. Итак, при каждом выборе первого элемента для выбора второго имеем *n-1* возможностей, т. е. для выбора двух элементов имеем $n(n - 1)$ возможностей. При каждом выборе первых двух элементов для выбора третьего элемента имеем n— 2 возможностей и т. д. На послед нее k-е место можно записать любой элемент, кроме выбранных k— 1 элементов на предыдущие места, т. е. для его выбора имеем n — (k — 1) = n — k + 1 возможностей. Следовательно, всего размещений из n по k элементов будет

$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$. Полученное выражение состоит из k последовательных натуральных множителей, наибольший из которых равен n. Умножив и разделив полученное выражение на (n – k)! получим:

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) =$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Размещениями называют *упорядоченную* выборку k элементов, из n различных элементов основного множества.

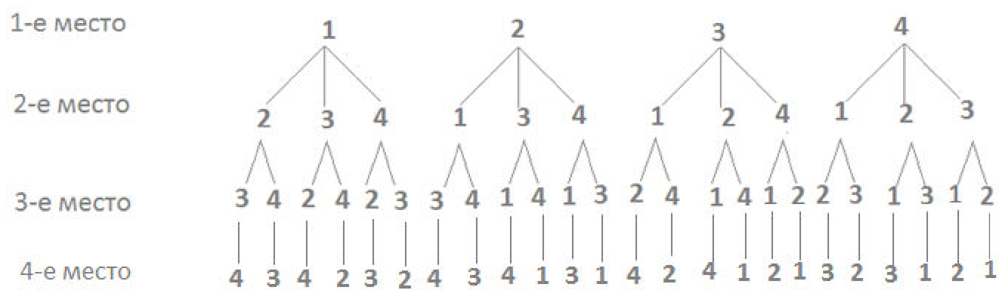
Число всех выборов k элементов из n различных элементов данного множества *с учетом их порядка* обозначают A_n^k и называют ***числом размещений из n элементов по k.***

В примере 4: $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$

Перестановки без повторений (Перестановки).

Пример 5. Сколько четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из 4 цифр: 1, 2, 3, 4?

Решение: Перечислим с помощью схемы все возможные числа:



Видим, что всего данных чисел 4·3·2·1 = 24.

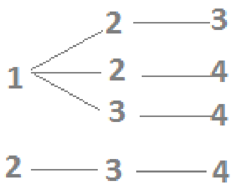
Данный пример является иллюстрацией к следующему понятию:

Размещения из n элементов по n принято называть перестановками. Иначе, ***перестановки*** — это упорядоченные множества из *n* различных элементов основного множества по *n.* Перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов. Число перестановок принято обозначать P_n. Общее число перестановок из *n* элементов равно $P_n = n!$

В примере 5: $P_4 = 4! = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 24$.

Неупорядоченные выборки.(Одновременный выбор)
Сочетания без повторений. (Сочетания).

Пример 6. Сколько трехэлементных подмножеств, различающихся хотя бы одним элементом друг от друга и без учета порядка в подмножестве, можно составить из 4 цифр: 1, 2, 3, 4?



Решение: Перечислим все полученные подмножества:

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4).

Видим, что всего получилось 4 подмножества.

Данный пример является иллюстрацией к следующему понятию:

Сочетания. Сочетаниями из n элементов по k называются соединения, каждое из которых содержит k элементов из данного множества n элементов и отличается от других хотя бы одним элементом. В сочетаниях нас интересуют только сами элементы множества и не интересует их порядок. Важно, какие конкретно элементы множества входят в каждое соединение.

Число сочетаний, т. е. число всех различных подмножеств длины k из данного множества, содержащего n элементов, обозначается C_n^k . Легко видеть, что если мы возьмем все сочетания из n по k и в каждом из них упорядочим элементы всеми возможными способами, т. е. из каждого сочетания получим все возможные перестановки, то получим все размещения из *n* элементов по k. Значит,

$A_n^k = C_n^k \cdot P_k$. Отсюда $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{A_n^k}{k!}$ или $C_n^k = \frac{P_n}{P_k \cdot P_{n-k}}$. Иначе

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

В примере 6: $C_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!} = 4$.

Пример 7. Сколькими способами можно выбрать *к* предметов из *n*? Например:

а)одновременно вынимают две карты из колоды:

$$C_{36}^2 = \frac{36!}{(36-2)!\,2!} = \frac{36 \cdot 35}{2} = 630;$$

б)наугад зачеркивают 6 чисел из 49-ти:

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = 13\,980\,000;$$

в)случайно отбирают трех человек из 25:

$$C_{25}^{3} = \frac{25!}{22! \cdot 3!} = 2\,300.$$

Сочетания с повторениями.

Сочетания с повторениями – неупорядоченная выборка, состоящая из n необязательно различных элементов. Обозначается $\overline{C_n^k}$.

$$\overline{\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}} = \frac{(\mathrm{n}+\mathrm{k}-1)!}{(\mathrm{n}-1!)\mathrm{k}!},$$

где n – количество необязательно различных элементов основного множества, k – количество выбираемых.

Пример 8. Сколько будет костей в игре домино, если использовать, только четыре цифры 1, 2, 3, 4?

Решение: Используем формулу сочетаний с повторениями:

$$\overline{C_n^k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1!)k!} = \frac{(4+2-1)!}{2!\,(4-1)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!\,2} = 10.$$

Ответ 10.

Задачи для тренировки

Пример 8. Сколько четырехзначных чисел можно составить из 9 цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Решение: Цифры в числах могут повторяться, и число зависит от порядка цифр в его записи. Значит, это размещения с повторениями, т. е. кортежи. Их число $\overline{A_9^4} = 9^4 = 6561.$

Ответ 6561.

Пример 9. В чемпионате участвует 12 команд. Сколькими различными способами могут быть распределены три различные медали?

Решение: Это размещения без повторения, т.к. одна команда не может занять два или три места сразу. A^3_{12}= 12·11·10= 1320.

Ответ 1320.

Пример 10.. В семье 6 человек. За столом 6 стульев. В семье решили каждый вечер рассаживаться на эти 6 стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?

Решение. Одного человека мы можем посадить только один раз. Значит, имеем перестановки без повторений. Одно размещение от другого может отличаться только порядком размещения людей, т. е. имеем перестановки 6 элементов: P_6= 6! = 720.

Ответ 720.

Пример 11. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

Решение: Слово «математика» является кортежем длины 10, имеющим состав (2,3,2,1,1,1) (буква «м» входит два раза, буква «а» - 3 раза, буква «т» - два раза, буквы «е», «и», «к» по одному разу). Значит, при перестановках букв получится

$$P(2,3,2,1,1,1)=\frac{10!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!}=151\,200\ "\textit{слов}".$$

Ответ 151 200.

Пример 12. У мамы было 2 яблока, 3 груши, и 4 апельсина. Каждый день она давала ребенку по одному фрукту. Сколькими способами она может это сделать?

Решение: $P(2,3,4)=\frac{9!}{2!3!4!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot2}=1260.$

Ответ 1260.

Пример 13. Сколькими способами из класса, в котором учатся 30 школьников, можно выбрать капитана команды для математических соревнований и его заместителя?
Решение: 1-й способ:
На роль капитана может быть выбран любой из 30 учащихся, а его заместитель – любой из 29 оставшихся учеников. Таким образом, получаем 30·29 = 870 способов.
2-й способ: Порядок важен, тогда по формуле числа размещений имеем

$$\mathbf{A}_{30}^{2}=\frac{30!}{(30-2)!}=\frac{30!}{28!}=\frac{30\cdot29\cdot28!}{28!}=\mathbf{30\cdot29=870}\ \text{способов.}$$

Ответ 870.
Пример 14. Сколькими способами из класса, в котором учатся 30 школьников, можно выбрать двоих для участия в математической олимпиаде?
Решение: 1-й способ:
Нам не важно, кто капитан, а кто заместитель, нам нужны всего лишь два участника, поэтому получаем, что у нас каждая пара учащихся в произведении повторяется два раза. Поэтому ответом для второй задачи будет (30·29):2 =435.
2-й способ: Без учета порядка применим формулу числа сочетаний

$$\mathbf{C}_{30}^{2}=\frac{30!}{(30-2)!\,2!}=\frac{30!}{28!2!}=\frac{30\cdot29\cdot28!}{28!2}=\frac{30\cdot29}{2}=\mathbf{435}.$$

Ответ 435.
Пример 15. Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (все три кнопки нажимаются одновременно), если на нем всего 10 цифр?
Решение: Так как кнопки нажимаются одновременно, то выбор этих кнопок – сочетание. Отсюда возможно $C_{10}^{3}=\frac{10!}{(10-3)!\cdot3!}=\frac{10\cdot9\cdot8}{6}=120$ вариантов.

Пример 16. Три медведя выбегают из дома, догоняя девочку. Сколькими способами они смогут это сделать?
Решение: Порядок выбегания из дома задает нумерацию трех медведей числами 1 2 3. Таких нумераций 3! = 6.

Ответ 6.

Пример 17. Сколькими способами можно построить пятерых человек в шеренгу?

Решение: По формуле числа перестановок имеем $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Ответ 120.

Пример 18. Сколькими способами 4 вора могут по одному разбежаться на все 4 стороны?

Решение: Стороны фиксированы, например юг, север, запад, восток или для простоты 1 2 3 4. Порядок разбегания по ним задает нумерацию 4-х воров числами 1 2 3 4. Таких нумераций имеется 4! =24.

Ответ 24.

Пример 19. 11 футболистов строятся перед началом матча. 1-ым – обязательно капитан, 2-ым – обязательно вратарь, а остальные – случайным образом. Сколько существует способов построения?

Решение: Капитана и вратаря строить не надо, т.к. их места фиксированы. 9 футболистов (все, кроме капитана и вратаря) надо расставить на 9 мест – с 3-его по 11-е. Всего имеется 9! = 362 880 таких перестановок.

Ответ 362 880.

Пример 20. В классе 27 учеников, из которых нужно выбрать троих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) 1-й ученик должен решить задачу, 2-й – сходить за мелом, 3-й – пойти дежурить в столовую; б) им следует спеть хором?

Решение: а) Порядок важен: $A_{27}^{3} = 27 \cdot 26 \cdot 25 = 17\,550$

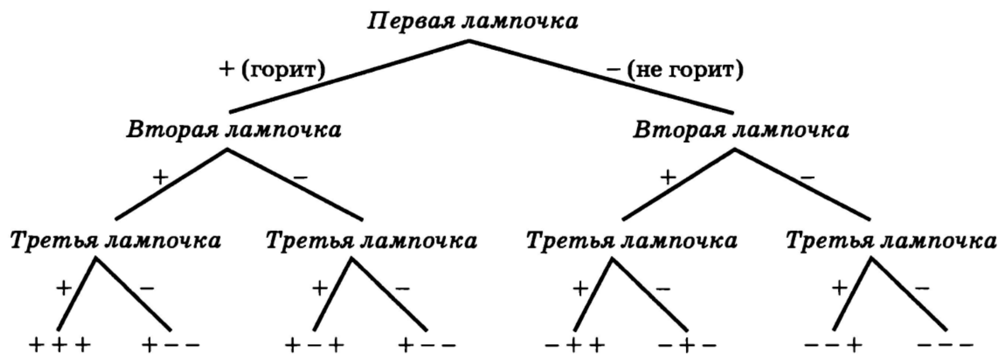
б) Порядок неважен: $C_{27}^{3} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25}{3 \cdot 2} = 2\,925$

Ответ а) 17 550, б) 2 925.

Пример 21. В коридоре 3 лампочки. Сколько существует различных способов освещения коридора? (включая случай, когда все три не горят)

Решение: 1-й способ: Пронумеруем лампочки. 1-я: горит или не горит (2 исхода), 2-я: горит или не горит (2 исхода), 3-я: горит или не горит (2 исхода). Лампочки горят или нет независимо друг от друга. По правилу умножения: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

2-й способ: Приведем дерево вариантов данной задачи:



Например, (+ - +) означает, что горят 1-я и 3-я, (---) – не горит ни одна и т.д. в нашем случае у трехэлементного множества $2^3 = 8$ подмножеств.

Пример 22. У бармена есть 6 сортов зеленого чая. Для проведения чайной церемонии требуется подать зеленый чай ровно 3 различных сортов. Сколькими способами бармен может выполнить заказ?

Решение: Тут все просто: есть n = 6 сортов, из которых надо выбрать k = 3 сорта. Число сочетаний можно найти по формуле:

$$C_6^3=\frac{6!}{3!\,(6-3)!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1}=\dots=20$$

Ответ 20.

Пример 23. В чемпионате по футболу 7 команд. Каждая команда играла с каждой один раз. Сколько всего было игр?

Решение: Порядок выбора не имеет значения, т.е. если выбраны две команды, то неважно, какая из них первая, а какая – вторая: $C_7^2=\frac{7!}{5!2!}=\frac{7\cdot6\cdot5!}{5!2}=21$.

Ответ 21.

Пример 24. Сколько всего исходов, если друг за другом из колоды вынимают две карты, не возвращая карту обратно (выбор без возвращения)?

Решение: $\mathbf{A_{36}^2}=\frac{36!}{(36-2)!}=\frac{36!}{34!}=\frac{36\cdot35\cdot34!}{34!}=\mathbf{36\cdot35=1260}$.

Ответ 1260.

Пример 25. Сколько существует всего исходов, если из колоды вынимают две карты одновременно?

Решение: Порядок не важен, значит:

$$C_{36}^2=\frac{36!}{34!\,2!}=\frac{36\cdot35\cdot34!}{34!\cdot2\cdot1}=\frac{36\cdot35}{2}=18\cdot35=630.$$

Ответ 630.

Пример 26. Сколько будет костей в игре домино, если использовать 8 цифр?

Решение: Используем формулу сочетаний с повторениями:

$$\overline{C_n^k}=\frac{(n+k-1)!}{(n-1!)k!}=\frac{(8+2-1)!}{2!\,(8-1)!}=\frac{9!}{2!\,7!}=\frac{9\cdot8\cdot7!}{7!\,2}=36.$$

Ответ 36.