Тема № 53 «Комбинированные задачи».

Задачи, рассмотренные в данном разделе, обобщают сведения комбинаторики, статистики и теории вероятностей.

Основные формулы комбинаторики.

	Порядок важен		Порядок неважен
Без повторений	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$P_n = A_n^n = n!$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$
С повторения-ми	$\overline{A_n^k} = n^k$	$\overline{P_n} = \overline{A_n^n} = n^n$ $P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1!\,k_2! \dots k_n!}$	$\overline{C_n^k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1!)k!}$
	Размещения	Перестановки	Сочетания

Правило умножения:

Пусть объекты A и B не зависят друг от друга. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

Правило суммы:

Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то

1. *выбрать либо A, либо B можно (m + n) способами, если A и B не имеют общих элементов.*
2. *выбрать либо A, либо B можно (m + n – d) способами, если A и B имеют d общих элементов.*

Другими словами, при объединении взаимоисключающих действий (событий, вариантов) число их комбинаций складывается.

Вероятностью наступления события A называют число, равное отношению числа событий, в которых это событие A произошло (благоприятствующих A), к общему числу равновозможных событий:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

Операции с вероятностями

1. Если события A и B *несовместны*, то вероятность наступления или A, или B, или A и B вместе равна P (A+B) = P(A) + P (B).

   Если A и B – *любые* события, а AB – событие, включающее исходы и A, и B, то вероятность наступления или A, или B равна P(A+B) = P(A) + P (B) - P(AB).
2. Если A и B – взаимно противоположные события, то P(A) + P(B) =1
3. Если события A и B независимы, то P(AB) = P(A) · P(B).

Пример 1. Какова вероятность выпасть «четырем» или «шести» очкам при одном бросании кости?

Решение: Так как кость правильная, то любое число очков от 1 до 6 выпадет с вероятностью 1/6 (одна из шести граней кубика). Одновременно и 4, и 6 выпасть не могут, т.к. у нас лишь один бросок. Значит, мы имеем дело с непересекающимися исходами, поэтому 1/6 + 1/6 = 1/3

Ответ 1/3

Пример 2. Из 6 учебников только 3 в переплете. Наудачу взяли 2 учебника. Какова вероятность, что они оба в переплете?

Решение: Используя формулу для вероятности, получим, что вероятность того, что первый учебник в переплете $P_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Когда первый учебник в переплете взяли, то осталось 5 учебников, из которых 2 в переплете, т.е. вероятность вытащить второй учебник в переплете $P_2 = \frac{2}{5}$. Тогда вероятность, что оба учебника в переплете $P = P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}2$

Ответ 0,2.

Пример 3. Класс, в котором учится 12 девочек и 12 мальчиков, случайным образом делят на две равные группы для занятий на компьютерах. Какова вероятность того, что мальчиков и девочек в них окажется поровну?

Решение: Переформулируем задачу: из 24 учеников этого класса случайно отбирают 12. Какова вероятность, что среди них ровно 6 мальчиков? (Убедитесь, что это действительно та же задача!) Всего способов выбора 12 человек из 24 будет

$$C_{24}^{12} = \frac{24!}{12! \cdot 12!} = 2\,704\,000;$$

причем все эти способы равновозможные. Благоприятные исходы: среди выбранных 12 человек находится ровно 6 мальчиков. Как сформировать любой такой исход? Сначала нужно выбрать любые 6 из 12 мальчиков, а потом добавить к ним любые 6 из 12 девочек. Общее количество таких вариантов выбора можно найти по правилу умножения:

$$C_{12}^{6} \cdot C_{12}^{6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} \cdot \frac{12!}{6! \cdot 6!} = 853\,800;$$

Искомая вероятность будет равна

$$P(A) = \frac{C_{12}^{6} \cdot C_{12}^{6}}{C_{24}^{18}} = \frac{3\,606\,000\,000}{9\,075\,000\,000} = 0{,}316.$$

Ответ 0,316

Пример 4. В группе пять человек: Ваня, Саша, Маша, Таня и Коля. По жребию двое из них выбраны дежурными. Найти вероятность того, что это Ваня и Таня.

Решение: Число элементарных событий в этом опыте равно числу сочетаний из 5 по 2: $C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$ Все элементарные события равновозможные. Событию А «дежурят Ваня и Таня» благоприятствует только одно элементарное событие. Поэтому $P(A) = \frac{1}{10} = 0{,}1.$

Ответ 0,1.

Пример 5. В ящике 4 красных и 2 желтых флажка. Из него наудачу извлекают 3 флажка. Какова вероятность того, что все эти флажки красные?

Решение: Число элементарных событий в этом опыте равно $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20.$

Все они равновероятны. Число благоприятных событий для события A «вынули три красных флажка» равно числу способов выбрать 3 красных флажка из 4 красных флажков, имеющихся в ящике. Это число равно $C_4^3 = \frac{4!}{1!\cdot 3!}$ = 4. Поэтому P(A) = $\frac{4}{20} =$ 0,2.

Ответ 0,2.

Пример 6. Найти вероятность того, что, извлекая наудачу 5 флажков из ящика, в котором 8 красных и 7 синих флажков, мы вытащим ровно 3 красных и 2 синих флажка?

Решение: Общее число элементарных событий равно числу сочетаний из 15 флажков по 5:

N = $C_{15}^5 = 3003$. Набрать 3 красных флажка из 8 можно одним из $C_8^3 = 56$ способов. Точно так же**,** набрать 2 синих флажка из 7 можно одним из $C_7^2 = 21$ способов. Следовательно, число исходов, благоприятствующих событию A «3 красных и 2 синих», равно N(A) = $C_8^3 \cdot C_7^2$. Итак

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_8^3 \cdot C_7^2}{C_{15}^5} = \frac{56 \cdot 21}{3003} = \frac{56}{143} \approx 0{,}392.$$

Ответ 0,392.

Пример 7. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение: Обозначим через B событие — набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т. е. A^2_{10} = 10 * 9 = 90. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможные и образуют полную группу. Благоприятствует событию B лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов: P (B) = 1 / 90.

Ответ 1/90.

Пример 8. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 4.

Решение: Общее число равновозможных исходов испытания равно 6 * 6 = 36 (каждое число выпавших очков на одной кости может сочетаться со всеми числами очков другой кости). Среди этих исходов благоприятствуют событию A только 3 исхода: (1; 3), (3; 1), (2; 2) (в скобках указаны числа выпавших очков). Следовательно, искомая вероятность P (A) = 3 / 36 = 1 / 12.

Ответ 1/12.

Пример 9. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение: Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов (C^6_{10}).

Определим число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию А (среди шести взятых деталей 4 стандартных). Четыре стандартные детали можно взять из семи стандартных деталей C^4_7 способами; при этом остальные 6 - 4 = 2 детали должны быть нестандартными; взять же 2 нестандартные детали из 10 - 7 = 3 нестандартных деталей можно C^2_3 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C^4_7 \cdot C^2_3$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов: $P(A) = (C^4_7 \cdot C^2_3) / C^6_{10} = 1/2$.

Ответ ½.

Пример 10. Из колоды в 36 карт ***одну за другой*** вытягивают две карты. Какова вероятность того, что они одного цвета, если первую вытащенную карту назад не возвращаем? *(выбор без возвращения)*

Решение: 1-й способ:

Подсчитаем общее количество исходов по правилу умножения: для первой карты у нас 36 возможных исходов, для второй — 35 вариантов (одну уже вытянули). Отсюда общее количество исходов $n = 36 \cdot 35 = 1260$.

Событие «карты одного цвета» означает или «карты красного цвета» или «карты черного цвета».

Теперь подсчитаем исходы, при которых обе карты красного цвета: для первой карты — 18 вариантов, для второй карты (если мы хотим, чтобы она была того же цвета, что и первая) — 17 вариантов (18-тую карту взяли первой). Отсюда количество благоприятных, для нашего события, исходов будет $m_1 = 18 \cdot 17 = 306$. Такое же число исходов будет для карт черного цвета, т.е. $m_2 = 306$. Тогда, по правилу сложения, общее число благоприятных исходов:

$m = m_1 + m_2 = 306 + 306 = 612$, а искомая вероятность: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{612}{1260} = \frac{17}{70} = 0{,}486$.

Ответ 0,486.

2-й способ: Порядок важен. Найдем вероятность, используя формулу размещения:

$$P(A) = \frac{\mathbf{A}^2_{18} + \mathbf{A}^2_{18}}{\mathbf{A}^2_{36}} = \frac{\frac{18!}{16!} + \frac{18!}{16!}}{\frac{36!}{34!}} = \frac{\frac{18 \cdot 17 \cdot 16!}{16!} + \frac{18 \cdot 17 \cdot 16!}{16!}}{\frac{36 \cdot 35 \cdot 34!}{34!}} = \frac{18 \cdot 17 + 18 \cdot 17}{36 \cdot 35} = \frac{17}{35} = 0{,}486$$

Ответ 0,486.

Пример 11. Из колоды в 36 карт **одну за другой** вытягивают две карты. Какова вероятность того, что они одного цвета, если первую вытащенную карту возвращаем обратно в колоду? *(выбор с возвращением)*

Решение: Отличие от примера 6 только в том, что можно повторно вытянуть ту же самую карту. Поэтому общее количество исходов будет $n = 36 \cdot 36 = 1296$, а количество благоприятных событий, т.е., что карты одного цвета: $m = m_1 + m_2 = 18 \cdot 18 + 18 \cdot 18 = 648$.

Осталось найти вероятность, что карты окажутся одного цвета: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{648}{1296} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Ответ 0,5

Пример12. На книжной полке случайным образом расставляют 6 учебников. Какова вероятность, что учебник математики и учебник литературы окажутся рядом?

Решение: Общее количество всех возможных вариантов расположения 6-ти книг на полке легко подсчитать с помощью правила умножения: на первое место можно поставить любую из 6 книг, на второе — любую из 5 оставшихся и т. д. Всего получаем $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 6! = 720$ исходов.

Поставить на полку учебник математики можно 6-ю различными способами, *после чего поставить рядом с ним* учебник литературы можно одним или двумя различными способами. Это зависит от того, куда мы поставили учебник математики — на крайнее место или нет. Для этого разобьем все множество благоприятных исходов на два класса:

1-й класс: учебник математики стоит на краю, учебник литературы рядом с ним;

2-й класс: учебник математики стоит где-то в середине, учебник литературы рядом с ним.

Заметим, что эти классы действительно не пересекаются и исчерпывают все множество благоприятных исходов — ведь, в конце концов, учебник математики стоит либо на краю, либо где-то в середине.

Посчитаем число исходов *в 1-ом классе*: место с краю для учебника математики можно выбрать двумя способами, после чего учебник литературы можно поставить рядом с ним только одним способом, после чего оставшиеся 4 места можно занять 4! способами. Значит, в этом классе будет $2\cdot1\cdot4! = 48$ исходов.

Посчитаем число исходов *во 2-ом классе,* место в середине для учебника математики можно выбрать 4-мя способами, после чего учебник литературы можно поставить рядом с ним 2-мя способами, после чего оставшиеся 4 места можно занять 4! способами. Значит, в этом классе будет $4\cdot2\cdot4! = 192$ исхода.

Итого 48 + 192 = 240 благоприятных исходов. Вероятность интересующего нас события будет

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{240}{6!}=\frac{1}{3}=0{,}33.$$

Ответ 0,33.

Пример13. Вы получаете 6 карт из колоды. Какова вероятность, что среди них есть хотя бы один туз?

Решение: Обозначим событие, о котором идет речь в задаче, через *A* и найдем вероятность противоположного события B = {среди шести вынутых карт нет ни одного туза}.

Число всех равновозможных исходов данного эксперимента будет $n = 36\cdot35\cdot34\cdot33\cdot32\cdot31$, а число исходов, благоприятных для события B: $n = 32\cdot31\cdot30\cdot29\cdot28\cdot27$.

Отсюда $P(B)=\frac{32\cdot31\cdot30\cdot29\cdot28\cdot27}{36\cdot35\cdot34\cdot33\cdot32\cdot31}=0{,}465$, а значит $P(A)=1-0{,}465=0{,}535$

Ответ 0,535.

Прогнозирование частоты.

Какую практическую пользу можно извлечь из подсчета вероятностей?

Вы знаете, что с ростом числа экспериментов частота стремится к вероятности. Значит, *по известной вероятности можно* ***прогнозировать*** *частоту* повторения интересующего нас события в будущем. При этом вероятность может быть найдена любым из известных нам способов (в том числе оценена по уже имеющейся частоте).

Пример 14. При проведении контроля качества среди 1000 случайно отобранных деталей оказалось 5 бракованных. Сколько бракованных деталей следует ожидать среди 25 ООО деталей?

Решение: По результатам контроля можно оценить вероятность события *А = {произведенная деталь бракованная}.* Приближенно она будет равна его частоте:

$$P(A) \approx \frac{5}{1000} = 0{,}005.$$

Следует ожидать такую частоту и в будущем, поэтому среди 25 000 деталей окажется около 25 000 · 0,005 = 125 бракованных.

Пример 15. Население города Калуги составляет около 400 000 жителей. Сколько калужан родились 29 февраля?

Решение: 29 февраля бывает только в високосном году — один раз в четыре года, следовательно, для случайно выбранного человека его день рождения попадает на 29 февраля с вероятностью

$$P = \frac{1}{3 \cdot 365 + 366} = \frac{1}{1461} = 0{,}00068$$

Это значит, что среди 400 000 жителей Калуги следует ожидать около

$$400\ 000 \cdot \frac{1}{1461} = 274$$

человек, которым приходится праздновать свой день рождения раз в четыре года.

На прогнозировании частоты основан один интересный способ определения численности популяций, используемый в биологии.

Пример 16. Из озера выловили 86 рыб, которых пометили и отпустили обратно в озеро. Через неделю произвели повторный отлов — на этот раз поймали 78 рыб, среди которых оказалось 6 помеченных. Сколько приблизительно рыб живет в озере?

Решение: Оказывается, найти ответ на этот неожиданный вопрос совсем несложно. В самом деле: обозначим неизвестную нам численность рыб в озере через *N.* Тогда вероятность поймать помеченную рыбу в озере будет — 86/N. С другой стороны, эта вероятность должна приближенно равняться полученной во втором улове частоте:

$$\frac{86}{N} \approx \frac{6}{78}$$

Отсюда

$$N \approx \frac{86 \cdot 78}{6} \approx 1118.$$