Тема № 55 «Геометрическая прогрессия»

Последовательность чисел, каждый следующий член которой равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, называется **геометрической прогрессией.** Это число называется **знаменателем геометрической прогрессии** и обозначается буквой q.

Рекуррентная формула n-го члена: $b_{n+1} = b_n q$

Формула n-го члена: $b_n = b_1 q^{n-1}$

Сумма первых n членов 1-я формула $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

Сумма первых n членов 2-я формула $S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q}$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии ($|q|<1$) $S_n = \frac{b_1}{1-q}$

Характеристическое свойство $b_k = \sqrt{b_{k-1} b_{k+1}}$

Если $b_1 > 0$ и или $b_1 < 0$ и $0 < q < 1$, то прогрессия является возрастающей.

Если $b_1 > 0$ и $0 < q < 1$ или $b_1 < 0$ и $q > 1$, то прогрессия является убывающей

Если $q < 0$, то геометрическая прогрессия является знакопеременной: ее члены с нечетными номерами имеют тот же знак, что и ее первый член, а члены с четными номерами – противоположный ему знак. Знакопеременная геометрическая прогрессия не является монотонной.

Пример 1. У гражданина Петрова 1 августа 2000 года родился сын. По этому случаю он открыл в некотором банке вклад в 1000 рублей. Каждый следующий год 1 августа он пополнял вклад на 1000 рублей. По условиям договора банк ежегодно 31 июля начислял 20 % на сумму вклада. Через 6 лет у гражданина Петрова родилась дочь, и он открыл в другом банке ещё один вклад, уже в 2200 рублей, и каждый следующий год пополнял этот вклад на 2200 рублей, а банк ежегодно начислял 44% на сумму вклада. Через сколько лет после рождения сына суммы на каждом из двух вкладов сравняются, если деньги из вкладов не изымаются?

Решение: Через n лет в первом банке будет сумма

$1000 + 1000 \cdot 1{,}2 + \ldots + 1000 \cdot 1{,}2^n = 1000 \cdot \frac{1{,}2^{n+1}-1}{1{,}2-1} = 5000(1{,}2^{n+1} - 1)$ (руб)

Через n – 6 лет во втором банке окажется

$2200 + 2200 \cdot 1{,}44 + \ldots + 2200 \cdot 1{,}44^{n-6} = 2200 \cdot \frac{1{,}44^{n-5}-1}{1{,}44-1} = 5000(1{,}44^{n-5} - 1)$ (руб)

Приравняем эти суммы и решим полученное уравнение:

$$5000(1{,}2^{n+1} - 1) = 5000(1{,}44^{n-5} - 1)$$
$$1{,}2^{n+1} = 1{,}44^{n-5}$$
$$1{,}2^{n+1} = 1{,}2^{2(n-5)}$$

$n + 1 = 2n - 10$, $n = 11$.

Ответ 11.

Пример 2. Найдите разность восьмого и шестого членов геометрической прогрессии, если их сумма равна 16, а произведение второго и двенадцатого членов этой прогрессии равно 28.

Решение: $b_n = b_1 q^{n-1}$

Составим систему уравнений по условию задачи:

$\begin{cases} b_2 \cdot b_{12} = 28, \\ b_8 + b_6 = 16, \end{cases}$ $\begin{cases} b_2 \cdot b_{12} = b_8 \cdot b_6 = b_1^2 \cdot q^{12} = 28, \\ b_8 + b_6 = 16, \end{cases}$ $\begin{cases} b_8 \cdot b_6 = 28, \\ b_8 + b_6 = 16, \end{cases}$ $\begin{cases} b_8 \cdot b_6 = 28, \\ b_8 = 16 - b_6, \end{cases}$

$(16 – b_6)b_6 = 28$, $b_6^2 – 16b_6 + 28 = 0$, $b_6 = 14$ или $b_6 = 2$. Тогда $b_8 = 2$ или $b_8 = 14$.

$b_8 – b_6 = –12$ или $b_8 – b_6 = 12$

Ответ –12, 12.

Пример 3. Найдите x, если известно, что числа $x – 2$, $\sqrt{(6x)}$, $x + 5$ являются последовательными членами геометрической прогрессии (в указанном порядке).

Решение: Воспользуемся характеристическим свойством прогрессии:

$$\mathrm{b_k} = \sqrt{\mathrm{b_{k-1} b_{k+1}}}$$

$(x – 2)(x + 5) = 6x$, $x^2 – 3x – 10 = 0$, $x =5$ или $x = – 2$. По условию $x > 0$.

Ответ 5.

Пример 4. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если разность ее тридцатого и двадцать седьмого членов в 30 раз больше суммы двадцать шестого, двадцать седьмого и двадцать восьмого членов.

Решение: Используя формулу общего члена прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$, запишем условие задачи:

$b_{30} – b_{27} = b_1q^{29} – b_1q^{26} = b_1q^{26}(q^3 – 1)$.

$b_{26} + b_{27} + b_{28} = b_1q^{25} + b_1q^{26} + b_1q^{27} = b_1q^{25}(1 + q + q^2)$.

Согласно условию составим уравнение: $b_1q^{26}(q^3 – 1) = 30\, b_1q^{25}(1 + q + q^2)\ |: b_1q^{25}$

$q(q – 1)(1 + q + q^2) = 30(1 + q + q^2)\,|: (1 + q + q^2)$, $q^2 – q – 30 = 0$, $q = 6$ или $q = –5$.

Ответ 6, –5.

Пример 5. Если тринадцатый член геометрической прогрессии увеличить в 12 раз и сложить с пятнадцатым членом, то получится число, в 7 раз большее ее четырнадцатого члена. Найдите знаменатель прогрессии.

Решение: Согласно условию составим уравнение: $12b_{13} + b_{15} = 7b_{14}$.

Используя формулу общего члена прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$, получим уравнение:

$12b_1q^{12} + b_1q^{14} = 7b_1q^{13}\,|: b_1q^{12}$, $q^2 – 7q +12 = 0$, $q = 4$ или $q = 3$.

Ответ 4,3.

Пример 6. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, у которой отношение седьмого члена к шестому в 7 раз меньше отношения шестого члена к четвертому.

Решение: Подставим в условие задачи: $\frac{b_6}{b_4} = 7 \cdot \frac{b_7}{b_6}$ формулу общего члена прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$, получим $\frac{b_1 q^5}{b_1 q^3} = 7 \cdot \frac{b_1 q^6}{b_1 q^5}$, откуда $q^2 = 7q$, $q =7$.

Ответ 7.

Пример 7. Существует ли геометрическая прогрессия, в которой третий член равен 9, а девятый член равен —3?

Решение: Пусть такая прогрессия существует, тогда согласно условию:

$b_3 = b_1q^2 = 9$,
$b_9 = b_1q^8 = -3$,
Разделим второе уравнение на первое, получим: $q^6 = -1/3$.
Полученное равенство невозможно ни при каком q, поскольку выражение q^6 принимает только положительные значения.
Значит, предположение неверно, такая прогрессия не существует.
Ответ не существует
Пример 8. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если ее пятьдесят первый член в 36 раз меньше ее пятьдесят третьего члена.

Решение: Из условия задачи находим: : $\frac{b_{53}}{b_{51}} = 36$
Используя формулу общего члена прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$, получим:
$\frac{b_1q^{52}}{b_1q^{50}} = 36$, $q^2 = 36$, $q = 6$ или $q = -6$.
Ответ 6, – 6.
Пример 9. Первый член бесконечной геометрической прогрессии на 8 больше второго, а сумма ее членов равна 18. Найти третий член прогрессии.

Решение: Выразим первый член прогрессии, используя формулу общего члена:
$b_1 = b_2 + 8$, $b_1 = b_1q + 8$, $b_1(1 - q) = 8$, $b_1 = \frac{8}{1-q}$.
Подставим полученное значение для первого члена в формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии: $S_n = \frac{b_1}{1-q}$

$18 = \frac{b_1}{1-q}$, $18(1 - q) = b_1$, $18(1-q) = \frac{8}{1-q}$, $(1 - q)^2 = 8/18 = 4/9$,
$1 - q = 2/3$ или $1 - q = -2/3$, откуда $q = 1/3$ или $q = 1\,2/3 > 1$, не подходит, т.к. $|q| < 1$.
Тогда $b_1 = \frac{8}{1-q} = \frac{8}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$.

$$b_3 = b_1q^2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.$$

Ответ 4/27.
Пример 10. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 1,5, а сумма квадратов ее членов равна 1,125. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

Решение: Если вынесем общий множитель в выражении для суммы квадратов членов прогрессии, то можно заметить, что в скобках получим новую бесконечную геометрическую прогрессию с первым членом, равным 1 и знаменателем q^2:
$S = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 +\ldots = b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 +\ldots = b_1^2(1 + q^2 + q^4 +\ldots) = 1{,}125$, поэтому

$$S = b_1^2 \frac{1}{1-q^2} = \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{9}{8}.$$

Запишем теперь оба условия задачи в виде системы:

$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = \frac{3}{2}, \\ \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{9}{8}, \end{cases}$ Разделим 2-е уравнение на 1-е: $\begin{cases} \frac{b_1}{1+q} = \frac{3}{4}, \\ \frac{b_1}{1-q} = \frac{3}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = \frac{3}{4}(1+q), \\ b_1 = \frac{3}{2}(1-q), \end{cases}$

Приравняем правые части полученных уравнений и найдем q:

$\frac{3}{4} + \frac{3}{4}q = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}q, \quad q\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}, \quad \frac{9}{4}q = \frac{3}{4}, \quad q = \frac{1}{3}.$

Тогда $b_1 = \frac{3}{4}(1+q) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1.$

Ответ 1; 1/3.

Пример 11. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 64/7. Найти сумму квадратов членов этой прогрессии.

Решение: Если вынесем общий множитель в выражении для суммы кубов членов прогрессии, то можно заметить, что в скобках получим новую бесконечную геометрическую прогрессию с первым членом, равным 1 и знаменателем q^3:

$S = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \ldots = b_1^3 + b_1^3 q^3 + b_1^3 q^6 + \ldots = b_1^3(1 + q^3 + q^6 + \ldots) = 64/7$, поэтому

$$S = b_1^3 \frac{1}{1-q^3} = \frac{b_1^3}{1-q^3} = \frac{64}{7}.$$

Запишем теперь оба условия задачи в виде системы:

$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 4, \\ \frac{b_1^3}{1-q^3} = \frac{64}{7}, \end{cases}$ Разделим 2-е уравнение на 1-е: $\begin{cases} \frac{b_1^2}{1+q+q^2} = \frac{16}{7}, \\ \frac{b_1}{1-q} = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} b_1^2 = \frac{16}{7}(1+q+q^2), \\ b_1 = 4(1-q), \end{cases}$

Если возведем второе уравнение системы в квадрат, то сможем приравнять правые части полученных уравнений и найти q:

$$\frac{16}{7}(1+q+q^2) = (4(1-q))^2,$$

$$\frac{16}{7}(1+q+q^2) = 16(1-2q+q^2)|:16,$$

$1 + q + q^2 = 7(1 - 2q + q^2)$, $1 + q + q^2 = 7 - 14q + 7q^2$, $6q^2 - 15q + 6 = 0|:3$,

$2q^2 - 5q + 3 = 0$, q = 0,5 или q = 2 > 1, поэтому корень исключаем.

Тогда $b_1 = 4(1 - 0{,}5) = 2$.

А искомая сумма $S = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots = b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 + \ldots = b_1^2(1 + q^2 + q^4 + \ldots)$

или $S = b_1^2 \frac{1}{1-q^2} = \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{2^2}{1-0{,}25} = 4 : \frac{3}{4} = \frac{16}{3}$

Ответ 16/3.