Тема № 56 «Комбинированные задачи»

Основные формулы арифметической прогрессии

Рекуррентная формула n-го члена: $a_{n+1} = a_n + d$
Формула n-го члена: $a_n = a_1 + d(n-1)$
Сумма первых n членов 1-я формула $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$
Сумма первых n членов 2-я формула $S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$
Характеристическое свойство $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$
Свойство крайних членов $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$

Основные формулы геометрической прогрессии

Рекуррентная формула n-го члена: $b_{n+1} = b_n q$
Формула n-го члена: $b_n = b_1 q^{n-1}$
Сумма первых n членов 1-я формула $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$
Сумма первых n членов 2-я формула $S_n = \frac{b_1-b_nq}{1-q}$
Сумма бесконечной геометрической прогрессии (|q|<1) $S_n = \frac{b_1}{1-q}$
Характеристическое свойство $b_k = \sqrt{b_{k-1}b_{k+1}}$

Пример 1. Известно, что 1-й, 7-й и 25 члены арифметической прогрессии с ненулевой разностью составляют геометрическую прогрессию. Найти q.
Решение: Рассмотрим геометрическую прогрессию, члены которой:
a_1, $a_7 = a_1 + 6d = a_1q$, $a_{25} = a_1 + 24d = a_1q^2$

$$\begin{cases} a_1q = a_1 + 6d, \\ a_1q^2 = a_1 + 24d, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1(q-1) = 6d, \\ a_1(q^2-1) = 24d, \end{cases}$$

Если разделим второе уравнение на первое, то получим q + 1 = 4, q = 3.
Ответ 3.

Пример 2. Три различных числа *a,b,c* образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Числа : *a + b, b + c, a + c* образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найти знаменатель геометрической прогрессии.
Дано: Г.П.: a_1, a_1q, a_1q^2 Найти q.
А.П.: $a_1 + a_1q$, $a_1q + a_1q^2$, $a_1 + a_1q^2$
Решение: Воспользуемся характеристическим свойством арифметической прогрессии: $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$

$$a_1q(1+q) = \frac{a_1 + a_1q + a_1 + a_1q^2}{2} = \frac{a_1(2+q+q^2)}{2}$$

$$a_1q(1+q) = \frac{a_1(2+q+q^2)}{2} \,\Big|\, : \frac{a_1}{2}$$

$$2q + 2q^2 - 2 - q - q^2 = 0$$

$$q^2 + q - 2 = 0, \; q = -2, \; q = 1.$$

Знаменатель геометрической прогрессии не может равняться 1.
Ответ –2.

Пример 3. Первый член возрастающей арифметической прогрессии равен 0,2. Найти разность прогрессии, если известно, что при делении каждого ее члена на номер этого члена получается геометрическая прогрессия и число членов прогрессии больше трех.
Дано: Г.П.: (0,2 + d)/2; (0,2 + 2d)/3; (0,2 + 3d)/4
Найти d.
Решение: Воспользуемся характеристическим свойством геометрической прогрессии: $\mathrm{b_k} = \sqrt{\mathrm{b_{k-1} b_{k+1}}}$

$\frac{0,2+2d}{3} = \sqrt{\frac{0,2+d}{2} \cdot \frac{0,2+3d}{4}}$. Возведем обе части в квадрат:

$^1/_9(0,2^2 + 4\cdot 0,2d + 4d^2) = {}^1/_8(0,2^2 + 0,2d + 0,6\,d + 3d^2)|\cdot 72$

$8(0,04 + 0,8d + 4d^2) = 9\,(0,04 + 0,8d + 3d^2)$

$0,32 + 6,4d + 32d^2 = 0,36 + 7,2d + 27\,d^2$

$5\,d^2 – 0,8d – 0,04 = 0$, $d = 0,2$, $d = -0,04$.

По условию арифметическая прогрессия возрастающая, поэтому разность
$d > 0$.
Ответ 0,2.

Пример 4. Три отличных от нуля числа образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел образуют геометрическую прогрессию. Найти все возможные знаменатели последней прогрессии.
Дано: А. П.: $\sqrt{\mathrm{b_1}}$, $\sqrt{\mathrm{b_1 q}}$, $\sqrt{\mathrm{b_1 q^2}}$ Найти q.
Г. П.: $\mathrm{b_1}$, $\mathrm{b_1 q}$, $\mathrm{b_1 q^2}$
Решение: Воспользуемся характеристическим свойством арифметической прогрессии: $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$

$\sqrt{\mathrm{b_1 q}} = \frac{\sqrt{\mathrm{b_1}}+\sqrt{\mathrm{b_1 q^2}}}{2}$ $|\cdot 2$, $2\sqrt{\mathrm{b_1 q}} = \sqrt{\mathrm{b_1}} + \sqrt{\mathrm{b_1 q^2}}$ |^2

$4\mathrm{b_1 q} = \mathrm{b_1}(1 + 2|\mathrm{q}| + \mathrm{q^2})|:\ \mathrm{b_1}$, $4\mathrm{q} = 1 + 2|\mathrm{q}| + \mathrm{q^2}$

1) $q > 0$, $q^2 – 2q + 1 = 0$, $q = 1$. $(q \neq 1)$
2) $q < 0$, $q^2 – 6q + 1 = 0$, $q = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Ответ $3 \pm 2\sqrt{2}$.

Пример 5. Цифры трехзначного числа составляют геометрическую прогрессию. Если из данного числа вычесть 297, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если же к цифрам данного числа, начиная с разряда сотен, прибавлять соответственно 8,5 и 1, то полученные суммы составят арифметическую прогрессию. Найти исходное число.
Решение: Пусть исходное число $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$.

$$\begin{cases} 100x + 10y + z - 297 = 100z + 10y + x, \\ y = \sqrt{xz}, \\ y + 5 = \frac{x+8+z+1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} 99x - 99z = 297 \quad |:99, \\ y^2 = xz, \\ 2y + 10 = x + z + 9, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3 = z, \\ y^2 = x(x-3), \\ 2y = x + x - 3 - 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3 = z, \\ y^2 = x^2 - 3x, \\ 2y = 2x - 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3 = z, \\ (x-2)^2 = x^2 - 3x, \\ y = x - 2, \end{cases}$$

Решим второе уравнение: $x^2 – 4x + 4 = x^2 – 3x$, $x = 4$,

тогда y = x – 2 = 2, z = x – 3 = 1.
Ответ 421.
Пример 6. Найти четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три составляют арифметическую прогрессию, причем сумма крайних чисел равна 32, а сумма средних чисел равна 24.
Решение: Пусть x, y, z, t – данные числа.

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ z = \frac{y+t}{2}, \\ x + t = 32, \\ y + z = 24, \end{cases} \begin{cases} y^2 = xz, \\ 2z = y + t, \\ t = 32 - x, \\ y = 24 - z, \end{cases} \begin{cases} (24 - z)^2 = xz, \\ 2z = 24 - z + 32 - x, \\ t = 32 - x, \\ y = 24 - z, \end{cases} \begin{cases} (24 - z)^2 = xz, \\ x = 56 - 3z, \end{cases}$$

$(24 – z)^2 = (56 – 3z)z$; $576 – 48z + z^2 = 56z – 3z^2$, $4z^2 – 104z + 576 = 0$,
z =18 или z = 8
x = 56 – 3z = 2 или x = 32
y = 24 – z = 6 или y = 16
t = 32 – x = 30 или t = 0.
Ответ 2, 6, 18, 30 или 32, 16, 8, 0.
Пример 7. Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 155, а сумма первых двух членов геометрической прогрессии равна 9. Найти эти прогрессии, если первый член арифметической прогрессии равен знаменателю геометрической прогрессии, а первый член геометрической прогрессии равен разности арифметической прогрессии.
Решение: Если подставим данные задачи в формулы суммы и n-го члена арифметической прогрессии, то получим систему уравнений:

$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$ $\quad a_n = a_1 + d(n – 1)$

$$\begin{cases} \frac{2q+9d}{2} \cdot 10 = 155, \\ d + dq = 9, \end{cases} \qquad \begin{cases} (2q + 9d) \cdot 5 = 155, \\ d(1 + q) = 9, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2q + 9d = 31, \\ d = \frac{9}{1+q}, \end{cases}$$

Подставим второе уравнение системы в первое и решим его:
$2q + \frac{9 \cdot 9}{1+q} = 31,$ $\quad 2q + 2q^2 + 81 – 31 – 31q =0$, $\quad 2q^2 – 29q + 50 = 0$,
q = 2 или q = 12,5. Тогда d = 3 или d = 2/3.
Ответ 2; 5; 8; … и 3; 6; 12; … или 25/2; 79/6; 83/6; … и 2/3; 25/3; 625/6; …
Пример 8. При каком значении параметра *a* значения функции
$y = x^3 – 6x^2 + 9x + a$ в точке x = 2 и в точках экстремума, взятые в некотором порядке, образуют геометрическую прогрессию?
Решение: Функция определена на всей числовой прямой. Достаточно легко найти точки экстремума данной функции:
$y' = 3x^2 – 12x + 9 = 3(x^2 – 4x + 3) = 3(x – 1)(x – 3)$
y' = 0 при x = 1, x = 3.
Найдем значение функции в точках экстремума и в точке x = 2:
y(3) = *a*; y(2) = 2+*a*; y(1) = 4+*a*.
Так как порядок чисел не определен, то необходимо проверить характеристическое свойство геометрической прогрессии, все комбинации:
1) Проверим порядок: *a*; 2+*a*; 4+*a*: $(2+a)^2 = a(4+a)$; $4 + 4a + a^2 = 4a + a^2$;

4 = 0, неверно.

2) Проверим порядок: a; $4+a$; $2+a$: $(4+a)^2 = a(2+a)$; $16 + 8a + a^2 = 2a + a^2$;

$6a = -16$; $a = -8/3$;

3) Проверим порядок: $4 + a$; a; $2+a$: $a^2 = (4 + a)(2 + a)$; $a^2 = 8 + 6a + a^2$;

$6a = -8$; $a = -4/3$.

Ответ $-8/3$; $-4/3$.

Пример 9. В трех растворах проценты содержания (по массе) спирта образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении 2:3:4, то получится раствор, содержащий 32% спирта. Если же смешать их в весовом отношении 3:2:1, то получится раствор, содержащий 22% спирта. Сколько процентов спирта содержит каждый раствор?

Решение: Пусть p_1, p_2, p_3 – концентрации данных растворов. По условию $p_2 = p_1q$, $p_3 = p_1q^2$, где q – знаменатель прогрессии. Используя формулу: $m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 = p(m_1 + m_2 + m_3)$, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2mp_1 + 3mp_1q + 4mp_1q^2 = 32(2m + 3m + 4m), \\ 3mp_1 + 2mp_1q + mp_1q^2 = 22(3m + 2m + m), \end{cases}$$

Разделим все уравнения на $m > 0$.

$$\begin{cases} 2p_1 + 3p_1q + 4p_1q^2 = 32 \cdot 9, \\ 3p_1 + 2p_1q + p_1q^2 = 22 \cdot 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2p_1 + 3p_1q + 4p_1q^2 = 288, \\ 3p_1 + 2p_1q + p_1q^2 = 132, \end{cases}$$

Чтобы избавиться от третьего слагаемого, содержащего вторую степень, умножим второе уравнение на (– 4) и сложим его с первым уравнением:

$$\begin{cases} 2p_1 + 3p_1q + 4p_1q^2 = 288, \\ -10p_1 - 5p_1q = -240 \mid : (-5), \end{cases} \quad \begin{cases} 2p_1 + 3p_1q + 4p_1q^2 = 288, \\ 2p_1 + p_1q = 48, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\frac{48}{2+q} + 3\frac{48}{2+q}q + 4\frac{48}{2+q}q^2 = 288 \mid : 48, \\ p_1 = \frac{48}{2+q}, \end{cases}$$

Решим первое уравнение:

$$\frac{2}{2+q} + \frac{3}{2+q}q + \frac{4}{2+q}q^2 = 6,$$

$2 + 3q + 4q^2 = 12 + 6q$, $4q^2 - 3q - 10 = 0$, $q = -1{,}25$ или $q = 2$. Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи.

Итак, $p_1 = 48/(2 + 2) = 12\%$, $p_2 = p_1q = 12\cdot 2 = 24\%$, $p_3 = p_1q^2 = 12\cdot 2^2 = 48\%$.

Ответ 12, 24, 48.

Пример 10. Три конькобежца, скорости которых в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию, одновременно стартуют (из одного места) по кругу. Через некоторое время второй конькобежец обгоняет первого, пробежав на 400 м больше его. Третий конькобежец пробегает то расстояние, которое пробежал первый к моменту обгона его вторым, за время на $^2/_3$ минуты больше, чем первый. Найти скорость первого конькобежца.

Решение: Нетрудно догадаться, что самый «быстрый» из конькобежцев – это второй, на втором месте – первый, и самый «медленный» – третий. Поэтому пусть скорости конькобежцев в возрастающем порядке:

$$v_3 = v,\ v_1 = vq,\ v_2 = vq^2.$$

	S	v	t
I	S	vq	t
II	S + 400	vq^2	t
III	S	v	$t + {}^2/_3$

1) Используя первые две строки таблицы, найдем S из системы:

$\begin{cases} vq = \frac{S}{t} = \frac{Svq^2}{S+400}, \\ t = \frac{S+400}{vq^2}, \end{cases}$ $\quad vq = \frac{Svq^2}{S+400}\ |: vq, \qquad 1 = \frac{Sq}{S+400}, \qquad S + 400 = Sq,$

$S(q-1) = 400,\ S = {}^{400}/_{q-1}.$

2) Используя первую и третью строки таблицы, найдем t из системы:

$\begin{cases} vq = \frac{S}{t}, \\ v = \frac{S}{t+\frac{2}{3}}, \end{cases}$ Разделим первое уравнение на второе, получим:

$$q = \frac{t+\frac{2}{3}}{t} = 1 + \frac{2}{3t}, \quad \frac{2}{3t} = q - 1, \quad t = \frac{\frac{2}{3}}{q-1}.$$

3) Найдем скорость первого конькобежца:

$$vq = \frac{S}{t} = \frac{400}{q-1} : \frac{\frac{2}{3}}{q-1} = \frac{400 \cdot 3}{2} = 600 \ \left(\frac{\text{м}}{\text{мин}}\right).$$

Ответ 600.