Тема № 57 «Векторы на плоскости и в пространстве»

Данный раздел рассматривает универсальный метод решения задач типа С.
Вектор – это направленный отрезок. Его длиной считают длину отрезка.

Если даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то вектор

$$\overline{n} = \overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Расстояние между двумя точками – это длина отрезка M_1M_2 или длина вектора n:

$$\overline{|n|} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Если даны два вектора $\overline{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b}(x_2, y_2, z_2)$, то

1) ***длины векторов***:

$$\overline{|a|} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad \overline{|b|} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

2) ***сумма векторов:***

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Суммой двух векторов *a* и b является диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах, исходящая из общей точки их приложения (правило параллелограмма); или вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего – по правилу треугольника.

Суммой трех векторов *a*, b, c называется диагональ параллелепипеда, построенного на этих векторах (правило параллелепипеда).

3) ***разность векторов:***

$$\overline{a} - \overline{b} = \overline{m}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

4) ***умножение вектора на число (скаляр):***

$$\overline{t} = k\overline{b}(kx_2, ky_2, kz_2)$$

Векторы t и b называются ***коллинеарными***, т.е. лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Пропорциональные координаты – условие коллинеарности векторов.

5) ***скалярное произведение векторов:***

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$
$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{|a|} \cdot \overline{|b|} \cdot cos\alpha$$

Если скалярное произведение равно нулю, то векторы перпендикулярны.

6) ***угол между векторами a и b, точнее его косинус:***

$$cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

7) ***векторное произведение векторов:***

$$\overline{p} = [\overline{a} \cdot \overline{b}] = \overline{|a|} \cdot \overline{|b|} \cdot sin\alpha$$

$$[\overline{a} \cdot \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - y_2z_1)\overline{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\overline{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\overline{k}$$

$\overline{p} \perp \overline{a}, \overline{p} \perp \overline{b}, |\overline{p}| = S_{\square}$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах *a, b.*

Если $[\overline{a} \cdot \overline{b}] = 0$, то данные векторы ***коллинеарные*** (параллельны прямой).

$$S = \sqrt{(y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2}$$

8) ***смешанное произведение векторов*** $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}(x_3, y_3, z_3)$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + x_2y_3z_1) - \\ -(x_3y_2z_1 + y_3z_2x_1 + x_2y_1z_3)$$

Если $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = 0$, то данные векторы ***компланарные*** (принадлежат плоскости или параллельны ей)**.**

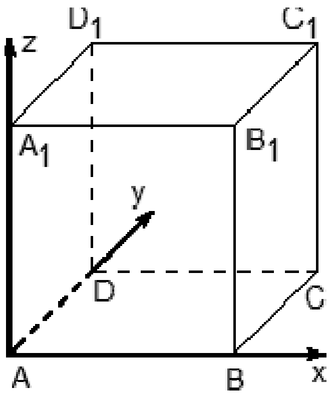
Три ненулевых вектора *a, b, c* ***компланарные,*** когда один из них выражается через два других, т.е. $\overline{c} = n\overline{a} + m\overline{b}$, где n, m – числа.

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком плюс, если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком минус, если они образуют левую тройку, т.е. $\overline{a} \cdot \overline{\mathrm{b}} \cdot \overline{\mathrm{c}} = \pm \mathrm{V}$.

9) ***Введение системы координат***

Как лучше ввести систему координат для самых часто встречающихся в задаче С2 многогранников, рассмотрим на примерах.

Координаты вершин куба



1. Начало координат — в точке A;
2. Сторона куба — единичный отрезок.
3. Ось OX направляем по ребру AB, OY — по ребру AD, а ось OZ — по ребру AA_1.

Для нижней плоскости куба:

Точка	A	B	C	D
Координаты	(0; 0; 0)	(1; 0; 0)	(1; 1; 0)	(0; 1; 0)

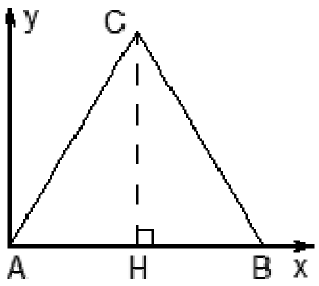
Для верхней плоскости куба:

Точка	A_1	B_1	C_1	D_1
Координаты	(0; 0; 1)	(1; 0; 1)	(1; 1; 1)	(0; 1; 1)

Координаты вершин трехгранной призмы

В задачах С2 встречаются исключительно правильные трехгранные призмы (прямые призмы, в основании которых лежит правильный треугольник).

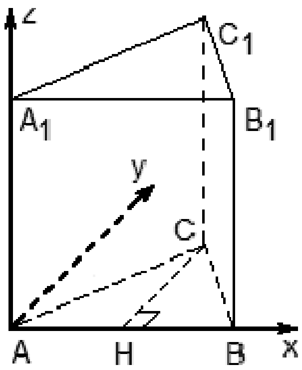
1. Начало координат — в точке А;
2. Сторона призмы — единичный отрезок, если иное не указано в условии задачи;
3. Ось ОХ направляем по ребру АВ, OZ — по ребру AA_1, а ось OY расположим так, чтобы плоскость OXY совпадала с плоскостью основания АВС.



Заметим, что ось y НЕ совпадает с ребром АС, т.к. треугольник АВС — равносторонний, в нем все углы по 60°. А углы между осями координат должны быть по 90°, поэтому сверху картинка будет выглядеть так:

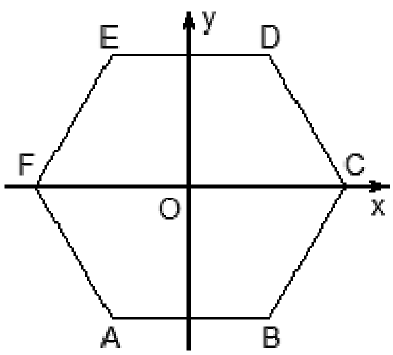
Проведем в этом треугольнике высоту СН. Треугольник АСН — прямоугольный, причем АС = 1, поэтому АН = 1 · cos A = cos 60°; СН = 1 · sin A = sin 60°. Эти факты нужны для вычисления координат точки С.

Получаем следующие координаты точек:



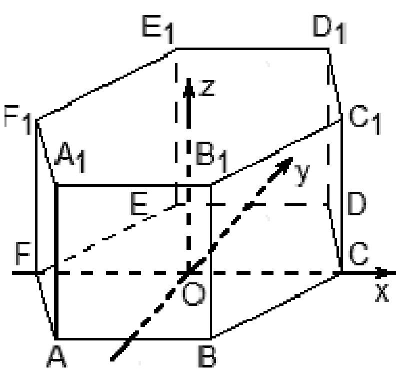
A	B	C	A_1	B_1	C_1
(0; 0; 0)	(1; 0; 0)	$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	(0; 0;1)	(1; 0;1)	$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

Координаты вершин шестигранной призмы



Начало координат — точку О — поместим в центр симметрии шестиугольника ABCDEF. Ось ОХ пойдет вдоль FC, а ось OY — через середины отрезков АВ и DE. Получим такую картинку:

Заметим, что начало координат НЕ совпадает с вершиной многогранника! Это позволяет значительно уменьшить объем вычислений.



OZ перпендикулярна плоскости OXY:

Пусть все ребра нашей правильной шестигранной призмы равны 1.

Координаты нижнего основания:

A	B	C	D	E	F
$\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	$\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	(1;0;0)	$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	$\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	(- 1; 0; 0)

Координаты верхнего основания:

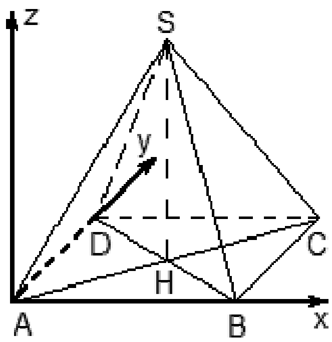
A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1
$\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$	(1; 0;1)	$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$	$\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$	(–1; 0; 1)

Координаты вершин четырехугольной пирамиды

Разберем только самый простой случай — правильную четырехугольную пирамиду, все ребра которой равны.

Начало координат в точке A, единичный отрезок AB = 1, ось OX направим вдоль AB, ось OY — вдоль AD, а ось OZ — вверх, перпендикулярно плоскости OXY.

Чтобы найти координаты вершин, проведем высоту SH. Рассмотрим плоскость OXY: в основании лежит квадрат, его координаты известны. Найдем координаты точки S. Поскольку SH — высота к плоскости OXY, точки S и H отличаются лишь координатой z. Длина отрезка SH — это и есть координата z для точки S, поскольку H = (0,5; 0,5; 0).



Треугольники ABC и ASC равны по трем сторонам (AS = CS = AB = CB = 1, а сторона AC — общая). Следовательно, SH = BH. Но BH — половина диагонали квадрата ABCD, т.е. BH = AB · sin 45°. Получаем координаты всех точек:

A	B	C	D	S
(0; 0; 0)	(1; 0; 0)	(1; 1; 0)	(0; 1; 0)	$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Мы рассмотрели лишь самые распространенные многогранники, однако этих примеров достаточно, чтобы самостоятельно вычислить координаты любых других фигур. Поэтому можно приступать, собственно, к методам решения конкретных задач.

Пример 1. В пространстве расположены три точки, заданные своими координатами: A = (1; 6; 3), B = (3; − 1; 7) и C = (− 4; 3; − 2). Найти координаты векторов AB, AC и BC.

Решение: Рассмотрим вектор AB: его начало находится в точке A, а конец — в точке B. Следовательно, чтобы найти его координаты, надо из координат точки B вычесть координаты точки A: AB = (3 − 1; − 1 − 6; 7 − 3) = (2; − 7; 4).

Аналогично, начало вектора AC — все та же точка A, зато конец — точка C. Поэтому имеем: AC = (− 4 − 1; 3 − 6; − 2 − 3) = (− 5; − 3; − 5).

Наконец, чтобы найти координаты вектора BC, надо из координат точки C вычесть координаты точки B: BC = (− 4 − 3; 3 − (− 1); − 2 − 7) = (− 7; 4; − 9).

Ответ: AB(2; − 7; 4); AC(− 5; − 3; − 5); BC (− 7; 4; − 9)

Пример 2. Найти косинус угла между векторами *a* = (4; 3; 0) и b = (0; 12; 5).

Решение. Поскольку координаты векторов даны, подставляем их в формулу №6:

$$\cos\varphi = \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot 12 + 0 \cdot 5}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 12^2 + 5^2}} = \frac{36}{5 \cdot 13} = \frac{36}{65}$$

Ответ 36/65.

Пример 3. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(1;-1;2), B (5;-6;2), C(1;3;-1).
Решение:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot S_{пар.}$$

$\overline{AB} = \{(5-1),(-6+1),(2-2)\} = \{4,-5,0\}$, $\overline{AC} = \{(1-1),(-1-3),(-1-2)\} = \{0,-4,-3\}$, тогда площадь треугольника ABC будет вычисляться следующим образом:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot S_{пар} = \left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot (15-0) - \bar{j} \cdot (-12-0) + \bar{k} \cdot (16-0) = 15\bar{i} + 12\bar{j} + 16\bar{k} = (15{,}12{,}16)$$

$$\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \sqrt{225 + 144 + 256} = \sqrt{625} = 25,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5(кв.ед.)$$

Ответ 12,5.

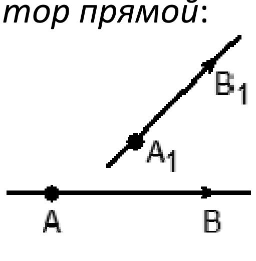
Пример 4. Вычислить смешанное произведение векторов $\bar{a}(1{,}2{,}3), \bar{b}(5,-2{,}4), \bar{c}(6{,}1{,}0)$
Решение:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 48 + 15) - (-36 + 4 + 0) = 63 + 32 = 95$$

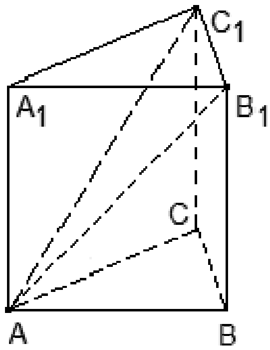
Ответ 95.

10*) **Вычисление направляющих векторов прямых***

Направляющим вектором прямой называется вектор параллельный данной прямой.
Прямая задается парой точек. Если ввести систему координат и рассмотреть вектор с началом и концом в этих точках, получим, так называемый, *направляющий вектор прямой*:



Угол между двумя прямыми — это угол между их направляющими векторами.
Пример 5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, проведены прямые AB_1 и AC_1. Найдите координаты направляющих векторов этих прямых.



Решение: Введем систему координат: начало в точке A, ось x совпадает с AB, ось z совпадает с AA_1, ось y образует с осью x плоскость OXY, которая совпадает с плоскостью ABC.

$A(0; 0; 0)$, $B_1(1; 0; 1)$, тогда $AB_1\ (1 - 0; 0 - 0; 1 - 0) = AB_1(1; 0; 1)$ – направляющий вектор прямой AB_1 .

$C_1 = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right) \Rightarrow AC_1 = \left(\frac{1}{2} - 0; \frac{\sqrt{3}}{2} - 0; 1 - 0\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$ – направляющий вектор для прямой AC_1.

Ответ $AB_1 = (1; 0; 1)$; $AC_1 = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$

11) ***Вычисление нормалей плоскостей***

Уравнение плоскости в трехмерном пространстве: $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C и D — действительные числа, причем, если плоскость проходит через начало координат, то $D = 0$. А если не проходит, то $D = 1$.

Нормальный вектор (нормаль) к плоскости — это вектор, перпендикулярный данной плоскости.
Вектор, перпендикулярный к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, имеет координаты: $n = (A; B; C)$.

В задачах типа С2 часто требуется найти угол между прямой и плоскостью. Этот угол легко найти формуле №6 как синус угла между нормалью и направляющим вектором прямой. (Синус, т.к. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$).
Пример 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M = (2; 0; 1)$, $N = (0; 1; 1)$ и $K = (2; 1; 0)$, если известно, что она не проходит через начало координат.

Решение: Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$, но, поскольку искомая плоскость не проходит через начало координат — точку (0; 0; 0) — то положим $D = 1$. Поскольку эта плоскость проходит через точки M, N и K, то координаты этих точек должны обращать уравнение в верное числовое равенство.

Подставим вместо x, y и z координаты точки M = (2; 0; 1). Имеем:
$A \cdot 2 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow 2A + C + 1 = 0$;

Аналогично, для точек N = (0; 1; 1) и K = (2; 1; 0) получим уравнения:
$A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow B + C + 1 = 0$;
$A \cdot 2 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow 2A + B + 1 = 0$;

Итак, у нас есть три уравнения и три неизвестных. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A + C + 1 = 0 \\ B + C + 1 = 0 \\ 2A + B + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} A = -0{,}25 \\ B = -0{,}5 \\ C = -0{,}5 \end{cases}$$

Получили, что уравнение плоскости имеет вид: $-0{,}25A - 0{,}5B - 0{,}5C + 1 = 0$.

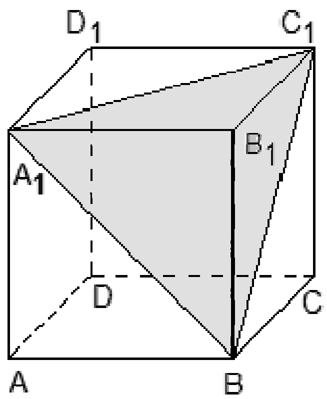
Ответ $-0{,}25A - 0{,}5B - 0{,}5C + 1 = 0$

Пример 7. Плоскость задана уравнением $7x - 2y + 4z + 1 = 0$. Найти координаты вектора, перпендикулярного данной плоскости.

Решение: Используя третью формулу, получаем n = (7; − 2; 4)

Ответ (7; − 2; 4).

Пример 8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение A_1BC_1. Найти нормальный вектор для плоскости этого сечения, если начало координат находится в точке A, а оси x, y и z совпадают с ребрами AB, AD и AA_1 соответственно.



Решение: Поскольку плоскость не проходит через начало координат, ее уравнение выглядит так: $Ax + By + Cz + 1 = 0$, т.е. коэффициент $D = 1$. Поскольку эта плоскость проходит через точки A_1, B и C_1, то координаты этих точек обращают уравнение плоскости в верное числовое равенство.

Подставим вместо x, y и z координаты точки $A_1 = (0; 0; 1)$. Имеем:
$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow C + 1 = 0 \Rightarrow C = -1$;

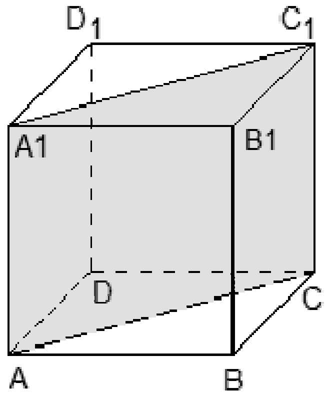
Аналогично, для точек $B = (1; 0; 0)$ и $C_1 = (1; 1; 1)$ получим уравнения:
$A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow A + 1 = 0 \Rightarrow A = -1;$
$A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow A + B + C + 1 = 0;$

Но коэффициенты $A = -1$ и $C = -1$ нам уже известны, поэтому остается найти коэффициент B:
$B = -1 - A - B = -1 + 1 + 1 = 1.$

Получаем уравнение плоскости: $-x + y - z + 1 = 0$, Следовательно, координаты нормального вектора равны $n(-1; 1; -1)$.

Ответ $(-1; 1; -1)$

Пример 9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение AA_1C_1C. Найти нормальный вектор для плоскости этого сечения, если начало координат находится в точке A, а оси x, y и z совпадают с ребрами AB, AD и AA_1 соответственно.



Решение: В данном случае плоскость проходит через начало координат, поэтому коэффициент $D = 0$, а уравнение плоскости выглядит так: $Ax + By + Cz = 0$.

Поскольку плоскость проходит через точки A_1 и C, координаты этих точек обращают уравнение плоскости в верное числовое равенство. Подставим вместо x, y и z координаты точки $A_1(0; 0; 1)$: $A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 1 = 0 \Rightarrow C = 0$.

Аналогично, для точки $C (1; 1; 0)$: $A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 0 = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B;$

Положим $B = 1$. Тогда $A = -B = -1$, и уравнение всей плоскости имеет вид:
$-A + B = 0$, Следовательно, координаты нормального вектора равны $n (-1; 1; 0)$.

Ответ $(-1; 1; 0)$.

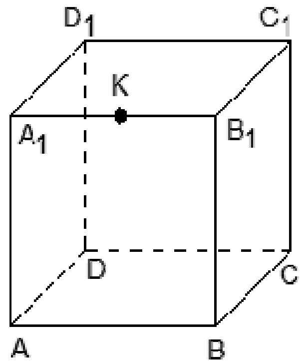
12) ***Координаты середины отрезка***

Пусть отрезок задан своими концами — точками $A = (x_a; y_a; z_a)$ и $B = (x_b; y_b; z_b)$. Тогда координаты середины отрезка — обозначим ее точкой H — можно найти по формуле:

$$H = \left(\frac{x_a + x_b}{2}; \frac{y_a + y_b}{2}; \frac{z_a + z_b}{2}\right)$$

Другими словами, координаты середины отрезка — это среднее арифметическое координат его концов.

Пример 10. Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещен в систему координат так, что оси x, y и z направлены вдоль ребер AB, AD и AA_1 соответственно, а начало координат совпадает с точкой A. Точка K — середина ребра A_1B_1. Найдите координаты этой точки.

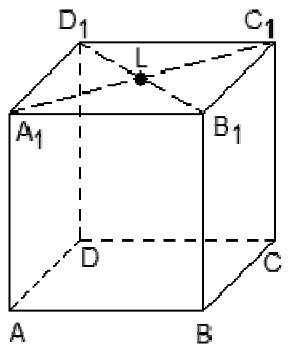


Решение: Поскольку точка K — середина отрезка A_1B_1, ее координаты равных среднему арифметическому координат концов. Запишем координаты концов:
$A_1 = (0; 0; 1)$ и $B_1 = (1; 0; 1)$. Теперь найдем координаты точки K:

$$K = \left(\frac{0+1}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{1+1}{2}\right) = (0{,}5; 0; 1)$$

Ответ (0,5; 0; 1).

Пример 11. Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещен в систему координат так, что оси x, y и z направлены вдоль ребер AB, AD и AA_1 соответственно, а начало координат совпадает с точкой A. Найдите координаты точки L, в которой пересекаются диагонали квадрата $A_1B_1C_1D_1$.



Решение. Из курса планиметрии известно, что точка пересечения диагоналей квадрата равноудалена от всех его вершин. В частности, $A_1L = C_1L$, т.е. точка L — это середина отрезка A_1C_1. Но A_1 (0; 0; 1), C_1 (1; 1; 1), поэтому имеем:

$$L = \left(\frac{0+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{1+1}{2}\right) = (0{,}5; 0{,}5; 1)$$

Ответ (0,5; 0,5; 1).

13) ***Вычисление расстояния от точки до плоскости***

Дана точка $M(x_0, y_0, z_0)$ и уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C и D — действительные числа. Напомним, что если плоскость проходит через начало координат, то $D = 0$, а если не проходит, то $D = 1$. Тогда d – расстояние от данной точки до плоскости вычисляют по формуле:

$$\mathrm{d} = \frac{|\mathrm{Ax_0} + \mathrm{By_0} + \mathrm{Cz_0} + \mathrm{D}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}$$

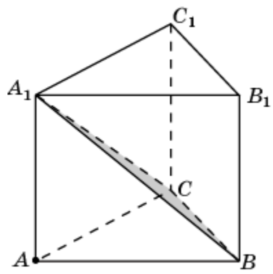
Пример 12. В примере 8 найти расстояние от точки D до плоскости A_1C_1B.

Решение: В примере 8 мы нашли уравнение плоскости: $-x + y - z + 1 = 0$. Подставим координаты точки D(0; 1; 0) и значения нормального вектора n(-1; 1; -1) в формулу:

$$\mathrm{d} = \frac{|-1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ответ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Пример 13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BCA_1.



Решение: Подставим в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ координаты точек $A_1(0; 0; 1)$, B(1; 0; 0), C(1/2;√3/2; 0). Найдем уравнение плоскости из системы уравнений:

$$\begin{cases} A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + 1 = 0, \\ A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + 1 = 0, \\ A \cdot \frac{1}{2} + B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + C \cdot 0 + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} C = -1, \\ A = -1, \\ -\frac{1}{2} + B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} C = -1, \\ A = -1, \\ B = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

$$-x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - z + 1 = 0| \times (-\sqrt{3}), \qquad \sqrt{3}x + y + \sqrt{3}z - \sqrt{3} = 0.$$

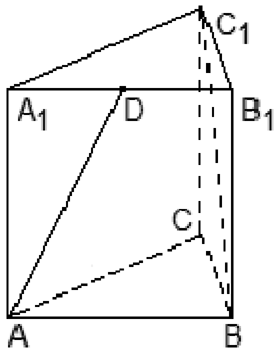
Тогда расстояние между точкой М и плоскостью:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 + 1 + 3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Тренировочные задачи

Пример 14. Найти косинус угла между прямыми AD и BC_1, если D – середина ребра A_1B_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$.



Решение: Очевидно, речь идет о косинусе угла между двумя прямыми. Введем систему координат: начало координат поместим в точку A, единичный отрезок равен AB = 1. Ось x направим вдоль AB, ось z — вдоль AA_1, а ось y расположим так, чтобы плоскость OXY совпадала с плоскостью ABC.

Найдем координаты вектора AD: A(0; 0; 0), точка D — середина отрезка A_1B_1, причем A_1 (0; 0; 1), B_1 (1; 0; 1), тогда D (0,5; 0; 1) — координаты середины отрезка равны среднему арифметическому координат концов.

Итак, находим координаты вектора AD:

AD = (0,5 − 0; 0 − 0; 1 − 1) = (0,5; 0; 1) → (1; 0; 2) — избавились от дробей, умножив координаты вектора на 2.

Теперь найдем координаты вектора BC_1: B = (1; 0; 0); $C_1 = \left(0{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

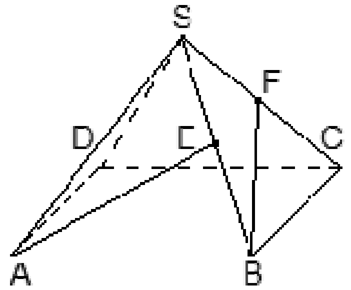
$$BC_1 = \left(0{,}5-1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}-0;\ 1-0\right) = \left(-0{,}5;\ \frac{\sqrt{3}}{2};1\right) \to (-1;\sqrt{3};2)$$

Координаты вектора BC_1 также оптимизировали, умножив все на 2.

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot(-1)+0\cdot\sqrt{3}+2\cdot 2}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+4^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}$$

Ответ $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

Пример 15. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, точки E и F — середины ребер SB и SC соответственно. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.



Решение: Введем систему координат следующим образом: начало координат — точка A, единичный отрезок равен AB = 1. Ось x направим вдоль AB, ось y — вдоль AD, а ось z направим вверх, т.е. перпендикулярно плоскости ABC. Найдем координаты векторов AE и BF.

Координаты точек A(0; 0; 0) и B(1; 0; 0) находятся легко. Точки E и F — середины отрезков SB и SC соответственно, поэтому для нахождения их координат нам потребуются точки C и S:
C = (1; 1; 0);

$$S=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow E=\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right);F=\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Координаты точек E и F нашли, проведя диагональ основания, высоту и воспользовались теоремой Пифагора.

Найдем и оптимизируем координаты векторов AE и BF:

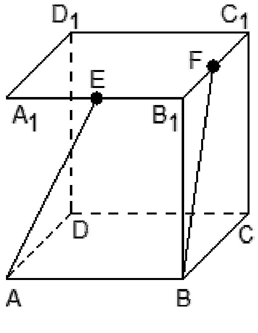
$$AE=\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\to\left(3;1;\sqrt{2}\right);\ BF=\left(-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\to\left(-1;3;\sqrt{2}\right)$$

В обоих случаях координаты вектора умножены на 4, чтобы избавиться от дробей. Осталось найти косинус:

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot(-1)+1\cdot3+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3^2+1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+3^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Ответ 1/6.

Пример 16. Задача. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки E и F — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Найдите угол между прямыми AE и BF.

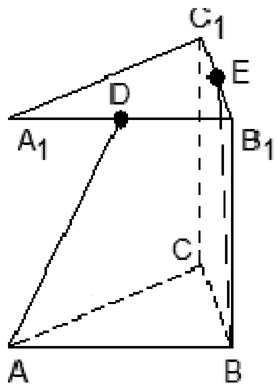


Решение: Введем систему координат: начало в точке A, оси x, y, z направим вдоль AB, AD и AA_1 соответственно. Единичный отрезок равен AB = 1.
Найдем координаты направляющих векторов для прямых.
Найдем координаты вектора AE: A (0; 0; 0), E (0,5; 0; 1). Поскольку точка E — середина отрезка A_1B_1, ее координаты равны среднему арифметическому координат концов. Заметим, что начало вектора AE совпадает с началом координат, поэтому AE (0,5; 0; 1).
Найдем координаты вектора BF. B(1; 0; 0), F (1; 0,5; 1), F — середина отрезка B_1C_1.
Имеем: BF(1 − 1; 0,5 − 0; 1 − 0) = BF (0; 0,5; 1).
Итак, косинус угла между прямыми — это косинус угла между направляющими векторами, поэтому имеем:

$$\cos\varphi = \frac{0,5\cdot 0 + 0\cdot 0,5 + 1\cdot 1}{\sqrt{0,5^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+0,5^2+1^2}} = \cdots = 0,8$$

Ответ arccos 0,8.

Пример 17. В правильной трехгранной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, отмечены точки D и E — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Найдите угол между прямыми AD и BE.



Решение: Введем систему координат: начало координат в точке A, ось x направим вдоль AB, z — вдоль AA_1. Ось y направим так, чтобы плоскость OXY совпадала с плоскостью ABC. Единичный отрезок равен AB = 1.
Найдем координаты направляющих векторов для искомых прямых.
Для начала найдем координаты вектора AD. Рассмотрим точки: A (0; 0; 0), D (0,5; 0; 1), D — середина отрезка A_1B_1. Поскольку начало вектора AD совпадает с началом координат, получаем AD = (0,5; 0; 1).
Теперь найдем координаты вектора BE. B (1; 0; 0), точка E — середина отрезка C_1B_1:

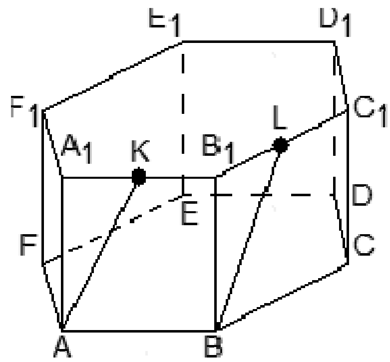
$$E = \left(\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right) \Rightarrow BE = \left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right)$$

Осталось найти косинус угла:

$$\cos\varphi = \frac{0,5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} + 1\cdot 1}{\sqrt{0,5^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+1^2}} = \cdots = 0,7$$

Ответ arccos 0,7.

Пример 18. В правильной шестигранной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, отмечены точки K и L — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Найти угол между прямыми AK и BL.



Решение: Введем систему координат: начало координат поместим в центр нижнего основания, ось x направим вдоль FC, ось y — через середины отрезков AB и DE, а ось z — вертикально вверх. Единичный отрезок равен AB = 1. Выпишем координаты интересующих нас точек:

$$A=\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)\quad K=\left(0;-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$$
$$B=\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)\quad L=\left(\frac{3}{4};-\frac{\sqrt{3}}{4};1\right)$$

Точки K и L — середины отрезков A_1B_1 и B_1C_1 соответственно, поэтому их координаты находятся через среднее арифметическое. Зная точки, найдем координаты направляющих векторов AK и BL:

$$AK=(0{,}5;0;\mathbf{1})\quad BL=(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1)$$

Теперь найдем косинус угла:

$$\cos\varphi=\frac{0{,}5\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+1\cdot1}{\sqrt{0{,}5^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+1^2}}=\cdots=0{,}9$$

Ответ arccos 0,9.