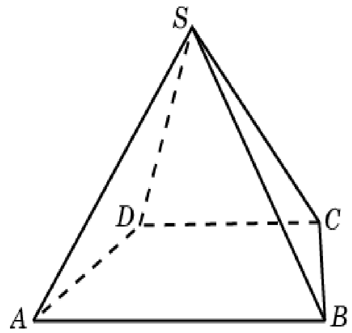
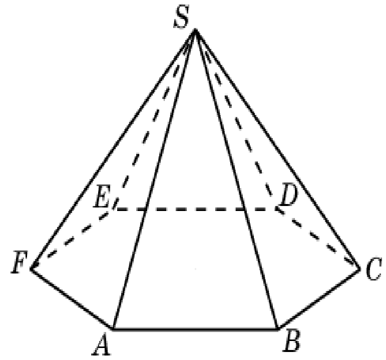
Тема № 59 «Пирамида»



Пирамидой называется многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого основанием пирамиды, и треугольников с общей вершиной, называемых боковыми гранями пирамиды. Пирамида называется ***n-угольной***, если ее основанием является *n*-угольник. Пирамида называется ***правильной***, если её основание – правильный многоугольник и все боковые ребра равны.



Пирамида называется ***прямоугольной***, если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно основанию. В данном случае, это ребро и является высотой пирамиды.

Усечённой пирамидой называется многогранник, заключённый между основанием пирамиды и секущей плоскостью, параллельной её основанию. Усечённая пирамида называется правильной, если пирамида, из которой она была получена – правильная.

Тетраэдром называется треугольная пирамида. В тетраэдре любая из граней может быть принята за основание пирамиды. Кроме того, существует большое различие в понятиях правильная треугольная пирамида и ***правильный тетраэдр.***

Элементы пирамиды

- ***апофема*** — высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины;
- ***боковые грани*** — треугольники, сходящиеся в вершине пирамиды;
- ***боковые ребра*** — общие стороны боковых граней;
- ***вершина пирамиды*** — точка, соединяющая боковые рёбра и не лежащая в плоскости основания;
- ***высота*** — отрезок перпендикуляра, проведённого через вершину пирамиды к плоскости её основания (концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра);
- ***диагональное сечение пирамиды*** — сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания;
- ***основание*** — многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды;

Свойства пирамиды

1. Если в пирамиде все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы, то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды.

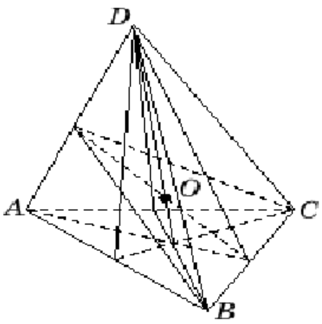
2. Если в пирамиде длины всех боковых ребер равны, то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды.

3. Если в пирамиде все боковые грани образуют с плоскостью основания равные углы, то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

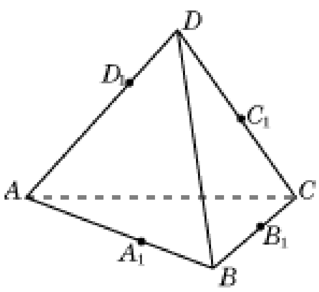
4. Если в пирамиде длины всех апофем боковых граней равны, то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды.
5. Боковые ребра правильной пирамиды – равны.
6. Боковые грани правильной пирамиды – равные друг другу равнобедренные треугольники.
7. Боковые ребра правильной пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы.
8. Апофемы правильной пирамиды равны;
9. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на высоту боковой грани.
10. В правильной усеченной *n*-угольной пирамиде все боковые ребра равны между собой.
11. Все боковые грани правильной усеченной *n*-угольной пирамиды суть равные равнобедренные трапеции (углы при основаниях равнобедренной трапеции равны).
12. В правильной усеченной *n*-угольной пирамиде все плоские углы при основаниях равны.
13. В правильной усеченной *n*-угольной пирамиде все двугранные углы при основаниях равны.
14. В правильной усеченной *n*-угольной пирамиде все двугранные углы при боковых ребрах равны.
15. Центром описанной, около пирамиды, сферы будет точка пересечения плоскостей, проходящих через середины рёбер пирамиды перпендикулярно им. Из этой теоремы следует, что как около любой треугольной, так и около любой правильной пирамиды можно описать сферу.
16. В пирамиду можно вписать сферу тогда, когда биссекторные плоскости внутренних двугранных углов пирамиды пересекаются в одной точке. Эта точка будет центром сферы.
17. Если центры вписанной и описанной сферы совпадают, то сумма плоских углов при вершине пирамиды равна π, а каждый из них соответственно $\frac{\pi}{n}$, где n — количество сторон многоугольника основания.
18. Конус называется вписанным в пирамиду, если вершины их совпадают, а его основание вписано в основание пирамиды. Причём вписать конус в пирамиду можно только тогда, когда апофемы пирамиды равны между собой.
19. Конус называется описанным около пирамиды, когда их вершины совпадают, а его основание описано около основания пирамиды. Причём описать конус около пирамиды можно только тогда, когда все боковые ребра пирамиды равны между собой.
20. Высоты у таких конусов и пирамид равны между собой.

21. Цилиндр называется вписанным в пирамиду, если одно его основание совпадает с окружностью, вписанной в сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, а другое основание принадлежит основанию пирамиды.
22. Цилиндр называется описанным около пирамиды, если вершина пирамиды принадлежит его одному основанию, а другое его основание описано около основания цилиндра. Причём описать цилиндр около пирамиды можно только тогда, когда в основании пирамиды — вписанный многоугольник.

23. Свойства тетраэдра



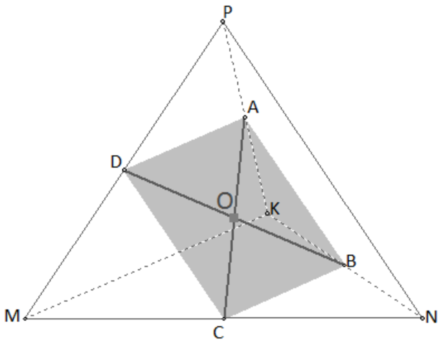
24.1. Биссектральные плоскости двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке – центре вписанной сферы.
24.2. Плоскости, проходящие через середины ребер тетраэдра и перпендикулярные этим ребрам, пересекаются в одной точке – центре описанной сферы.
24.3. Прямые, перпендикулярные граням тетраэдра, и проходящие через центры их описанных окружностей, пересекаются в одной точке – центре описанной сферы.
24.4. У тетраэдра существует сфера, касающаяся всех его ребер, тогда и только тогда, когда суммы противоположных ребер этого тетраэдра равны.
24.5. Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке – центроиде тетраэдра и делятся в этой точке в отношении 3 : 1, считая от вершины.
24.6. Точка пересечения высот правильного тетраэдра делит каждую из его высот в отношении 3:1, считая от вершины, и является центром его вписанной и описанной сфер. При этом, если ребро правильного тетраэдра равно b, то его высота h = b√(2/3).
24.7. Теорема (Менелая). Пусть на ребрах *AB, BC, CD* и *AD* тетраэдра *ABCD* взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 и D_1. Для того чтобы эти точки лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство



$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1.$$

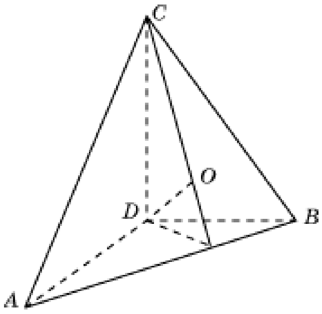
24.8. Теорема (Чевы). Пусть на ребрах *AB, BC, CD* и *AD* тетраэдра *ABCD* взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 и D_1. Плоскости ABC_1, BCD_1, CDA_1 и DAB_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1.$$



24.9. Бимедианы тетраэдра AC и BD , т.е. отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке O – центроиде.

24.10. Основанием высоты прямоугольного тетраэдра, проведенной из вершины с прямыми плоскими углами, является точка пересечения высот противоположной грани.



24.11. Теорема (Пифагора) Квадрат площади грани прямоугольного тетраэдра, лежащей против вершины с прямыми плоскими углами, равен сумме квадратов площадей остальных граней этого тетраэдра:

$S^2_{ACB} = S^2_{ADC} + S^2_{ADB} + S^2_{CDB}$

Формулы, связанные с пирамидой

- Произвольная пирамида

- Объём пирамиды может быть вычислен по формуле:

  $V = \frac{1}{3}Sh,$ где S — площадь основания и h — высота;

- Боковая поверхность — это сумма площадей боковых граней:

  $$S_b = \sum_i S_i$$

- Полная поверхность — это сумма боковой поверхности и площади основания:

  $S_{бок} = \frac{1}{2}P \cdot l$ $\quad$ $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

- Произвольная усечённая пирамида

  $$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$$

  $$где\ H - высота, S_1\ и\ S_2 - площади\ оснований,$$

  $$V - объем.$$

- Правильная усечённая пирамида

  $$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\,h$$

  $$S_{полн} = S_{бок} + S_1 + S_2,$$

  $$где\ h - апофема, P_1\ и\ P_2 - периметры\ оснований$$

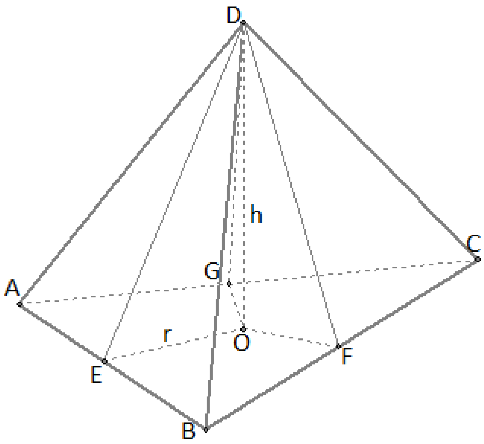
- Правильная пирамида

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot H \qquad S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha},$$

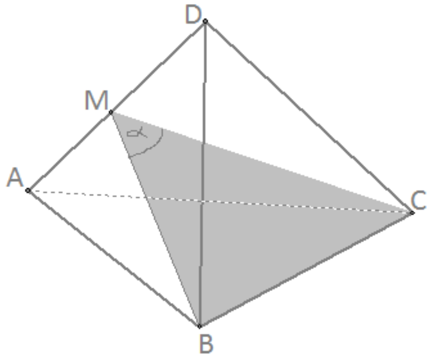
где α – двугранный угол при основании

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} \qquad V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$$

Решение задач



Пример 1. Основание тетраэдра DABC треугольник со сторонами 13 см,14 см, 15 см. Расстояние от точки D до сторон треугольника основания равны 5 см. Найти расстояние от точки D до плоскости ABC.
Решение: Расстояние от вершины до плоскости основания равно высоте, которая опущена из вершины на основание.
Величины апофем пирамиды равны по условию задачи. Высота, опущенная из вершины, является центром вписанной в основание окружности. Таким образом, прямоугольные треугольники, образованные высотой пирамиды и апофемой – равны по двум катетам.
Найдем радиус вписанной в основание окружности. Формула радиуса окружности, вписанной в произвольный треугольник:
S = pr, где $S = \sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))}$
p = (13 + 14 + 15) / 2 = 21, $S = \sqrt{(21\cdot 8\cdot 7\cdot 6)} = \sqrt{(7^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4)} = 84$, r = 4. По теореме Пифагора: $DE^2 = h^2 + r^2$.
$h^2 = 25 - 16$, $h^2 = 9$, h = 3 (см).
Ответ 3.

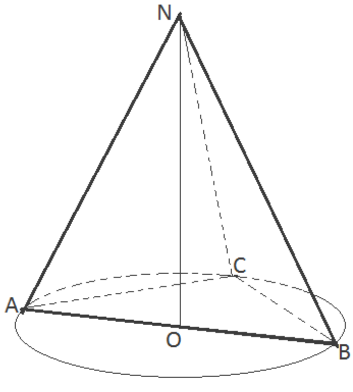


Пример 2. Найдите величину двугранного угла правильного тетраэдра.

Решение: Надо найти угол между двумя пересекающимися медианами двух боковых граней. По теореме Пифагора BM = CM = $\sqrt{3}/2$. По теореме косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3}$$

Ответ arcos(1/3).

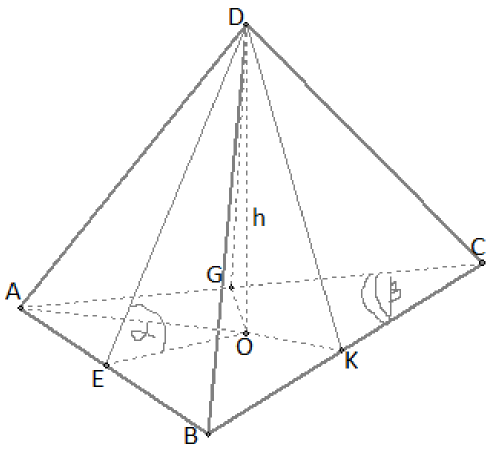


Пример 3. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого 8см, а радиус описанной около него окружности равен 5 см. Высота пирамиды равна 12см. Вычислить боковые ребра пирамиды.
Решение: Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на его гипотенузе. Кроме того AO = OC = OB = r, поэтому AB = 10 см.
ΔANO = ΔDNO = ΔCNO по двум катетам, поэтому боковые ребра пирамиды равны. Итак, AN = NB = NC найдем по теоре-

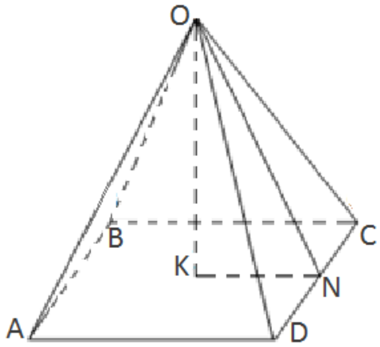
ме Пифагора: $AN^2 = AO^2 + ON^2$, $AN^2 = 5^2 + 12^2$,
$AN = \sqrt{169}$, $AN = 13$.

Ответ 13, 13 , 13.

Пример 4. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при основании β. Все боковые грани образуют с основанием угол α. Найти площадь полной поверхности пирамиды.



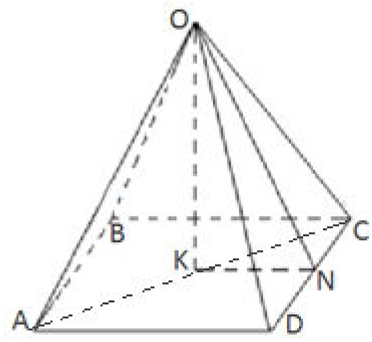
Решение: Найдем площадь основания как площадь равнобедренного треугольника, состоящего из двух прямоугольных. В прямоугольном Δ АКС:
$AK = AC \sin ß = b \sin \beta$
$CK = AC \cos \beta = b \cos \beta$
$S_{ABK} = AK \cdot CK/2 = b^2 \sin\beta \cos \beta/ 2$, откуда
$S_{ABC} = 2S_{ABK} = b^2 \sin\beta \cos\beta = 0{,}5b^2 \sin 2\beta$ (по формуле двойного угла).
Площадь боковой поверхности пирамиды:
$S_б = S_{ADC} + S_{ADB} + S_{BDC} = 2S_{ADC} + S_{BDC}$.
Высота пирамиды проецируется в точку О основания, которая одновременно является центром вписанной окружности с радиусом OE=r. Радиус вписанной окружности найдем как $r = S/p$.
Учитывая, что BC = 2CK, то $BC = 2b\cos\beta$, найдем полупериметр основания:
$p = (b + b + 2b\cos \beta) / 2$, $p = (2b + 2b\cos\beta) / 2$, $p = 2b(1 + \cos\beta) / 2$, $p = b(1 + \cos\beta)$
Радиус вписанной окружности: $r = S / p$
$r = 0{,}5b^2\sin2\beta / b(1 + \cos\beta) = 0{,}5b \sin2\beta / (1 + \cos\beta)$.
Апофемы пирамиды равны:
$DG = DK = DE = r/\cos\alpha = 0{,}5b \sin2\beta / (1 + \cos\beta)\cos\alpha$
$S_{ADB} = AB \cdot DE/2 = 0{,}25b^2\sin2\beta/(1 + \cos \beta)\cos\alpha$.
$S_{BDC} = BC \cdot DK/2 = 2b\cos\beta \cdot 0{,}5b\sin2\beta/2(1 + \cos\beta)\cos\alpha = 0{,}5b^2\cos\beta \sin2\beta/(1 + \cos\beta)\cos\alpha$
$S_б = 2 \cdot 0{,}25b^2\sin2\beta/(1 + \cos\beta)\cos\alpha + 0{,}5b^2\cos\beta \sin2\beta/(1 + \cos\beta)\cos\alpha$
$S_б = 0{,}5b^2\sin2\beta(1 +\cos\beta) / (1 + \cos\beta)\cos\alpha$
$S_б = 0{,}5b^2\sin2\beta / \cos\alpha$
$S_п = S_{ABC} + S_б = 0{,}5b^2\sin2\beta + 0{,}5b^2\sin2\beta/ \cos\alpha$
$S_п = 0{,}5b^2\sin 2\beta[1 + 1/\cos\alpha]$
Ответ $0{,}5b^2\sin 2\beta[1 + 1/\cos\alpha]$.



Пример 5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна b. Двугранные углы при основании равны α. Найти площадь полной поверхности пирамиды.
Решение: Поскольку пирамида правильная, то ее высота проецируется в центр основания.
Значит $KN = b/2$.
ΔOKN – прямоугольный: $ON = KN/\cos \alpha = b/2\cos \alpha$
Площадь ΔDOC: $S_{DOC} = DC \cdot ON/2$,
$S_{DOC} = (b \cdot b/2\cos \alpha)/2 = b^2 /4\cos \alpha$

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды будет равна площади всех ее боковых граней:
$S_б = 4b^2/4\cos\alpha = b^2/\cos\alpha$.

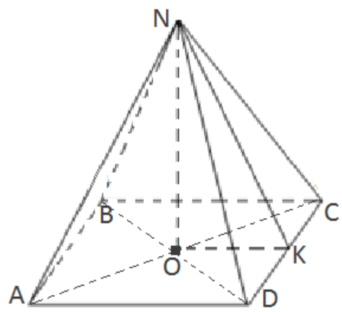
Площадь полной поверхности пирамиды : $S_п = b^2/\cos\alpha + b^2 = b^2 (1 + 1/\cos\alpha)$.
Ответ $b^2 (1 + 1/\cos\alpha)$.



Пример 6. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна b, высота равна 3b. Найдите углы наклона боковых рёбер и боковых граней к плоскости основания.

Решение: Обозначим углы наклона боковых граней к плоскости основания $\angle ONK=\alpha$, а углы наклона боковых ребер к плоскости основания $\angle OCK=\beta$.
ΔOKN - прямоугольный, $OK= 3b$, $KN = b/2$
$\operatorname{tg}\alpha = OK/KN = 3b/(b/2) = 6$, $\alpha = \operatorname{arctg} 6$
Диагональ квадрата со стороной b равна $b\sqrt{2}$.
Δ OKC – прямоугольный: (обозначим $\angle KCO= \beta$)

$\operatorname{tg}\beta = OK/KC = 3b/(b\sqrt{2}/2) = 6/\sqrt{2}$, $\beta = \operatorname{arctg}(6/\sqrt{2})$
Ответ угол наклона граней arctg 6; угол наклона ребер arctg $6/\sqrt{2}$.



Пример 7. Найти величину двугранного угла при основании правильной четырехугольной пирамиды, если её боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45º.

Решение: Обозначим искомый угол $\angle NKO = \alpha$.

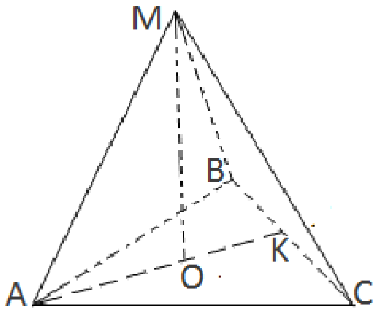
Поскольку боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды наклонены к основанию под углом 45º, то в ΔANC $\angle ANC = 90º$. Т.е. ΔANC - прямоугольный, причем $\Delta NOC = \Delta ANO$ – прямоугольные и равнобедренные, NO = OC.

Пусть длина ребра пирамиды равна b, тогда, исходя из того, что треугольник ANC - прямоугольный равнобедренный,
$AC^2 = NC^2 + AN^2 = 2b^2$, $AC = b\sqrt{2}$, откуда $OC = AC/2 = b\sqrt{2}/2 = b/\sqrt{2} = NO$.
В прямоугольном ΔCOD: $CD^2 = OC^2 + OD^2 = 2\,OC^2 = 2(b/\sqrt{2})^2 = b^2$, $CD = b$, тогда

$KC = CD/2 = b/2$.
$OK^2 = OC^2 - KC^2 = (b/\sqrt{2})^2 – (b/2)^2$, $OK = b/2$
В прямоугольном ΔKON: $\operatorname{tg}\alpha = NO/OK = b/\sqrt{2} : b/2 = \sqrt{2}$. Откуда $\alpha= \operatorname{arctg}\sqrt{2}$

Ответ $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Пример 8. Боковая грань правильной треугольной пирамиды представляет собой правильный треугольник, площадь которого 16√3 см^2. Вычислить периметр основания пирамиды.

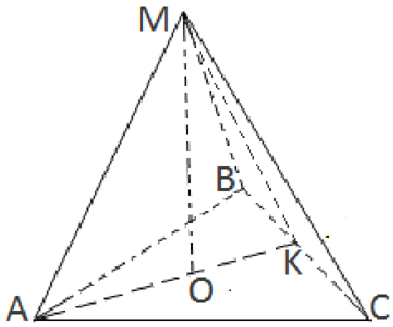


Решение: Так как основание правильной пирамиды и боковые грани являются равносторонними треугольниками, то все боковые грани равны и все ребра пирамиды одинаковые. Площадь боковой грани найдем как площадь равностороннего треугольника: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

16√3 = a^2 √3 / 4, 16 = a^2 / 4, a^2 = 64, a = 8 см.

Тогда периметр основания пирамиды равен 8·3 = 24 см.

Ответ 24.



Пример 9. В правильной треугольной пирамиде высота равна 10 см, а сторона основания 16 см. Найти площадь боковой поверхности.

Решение: Основанием треугольной пирамиды является равносторонний треугольник, поэтому АО является радиусом описанной около основания окружности, ОК – радиусом вписанной окружности, которые найдем из формул:

$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$ $\qquad a_n = 2r\,tg\frac{180°}{n}$

$a = R\sqrt{3}$, $a = 2r\sqrt{3}$. Тогда R = AO = 16/√3, r = OK = 8/√3,

AK = KC sin60 = 4√3.

$S_{осн}$ = BC·AK/2 = 16·4√3 /2 = 32√3 – площадь основания

ΔMOK: MK^2 = MO^2 + OK^2 = 100 + (8/√3)^2 = 364/3, MK = √(364/3)

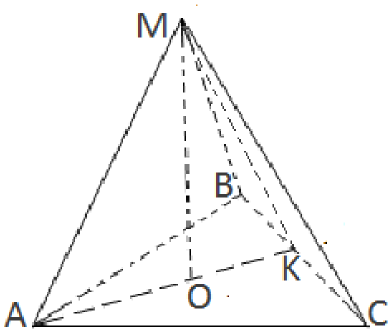
S_{AMC} = BC·MK/2 = 16· √(364/3)/2 = 8√(364/3)

$S_б$ = 3 S_{AMC} =3·8√(364/3) = 24√(364/3)

Ответ 24√(364/3).

Пример 10. Сторона правильной треугольной пирамиды равна 3 см а угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен 45 градусов. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Решение: Поскольку пирамида правильная, в ее основании лежит равносторонний



треугольник. Поэтому площадь основания равна $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

S_o = 9 √3/4

Для того, чтобы найти площадь боковой грани, вычислим апофему КМ:

cos∠ОКМ = cos45º = ОК / МК = √2/2, МК = 2ОК /√2.

ОК – это радиус вписанной окружности, $r = \frac{a}{2\mathrm{tg}60°}$.

ОК = *a* /(2√3) = *a* √3/6 = 3√3/6 = √3/2.

Тогда МК = 2√3/(2√2) = √(3/2) = √6/2.

$S_{бок}$ = 0,5 ВС·МК = 0,5 · 3√6/2 = 0,75√6

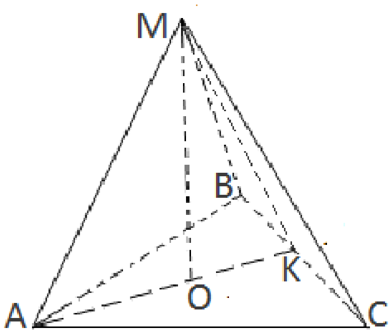
Откуда площадь полной поверхности будет равна

S = 9√3/4 + 3·0,75√6 = 2,25√3 +2,25 √6 = 2,25(√3 +√6).

Ответ 2,25(√3 +√6).

Пример 11. Высота правильной треугольной пирамиды 4 см, а ее апофемы 8 см. Вычислить площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение: Исходя из того, что МК = 8, МО = 4, sin∠ OKM = MO/MK = 1/2
откуда ∠ OKM = arcsin1/2 = 30º. Тогда cos30 = KO / MK, √3/2 = KO/ 8,



KO = 8 √3/2 = 4√3

KO – это радиус вписанной окружности в основание правильной треугольной пирамиды.

$$a_n = 2r\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$$

AB = 2·4√3· √3 = 24

Площадь боковой грани найдем, как площадь равнобедренного треугольника:

$S_б$ = 1/2 · 24 · 8 = 96 $см^2$

Откуда площадь боковой поверхности пирамиды

S = 3·$S_б$ = 3 · 96 = 288 $см^2$.

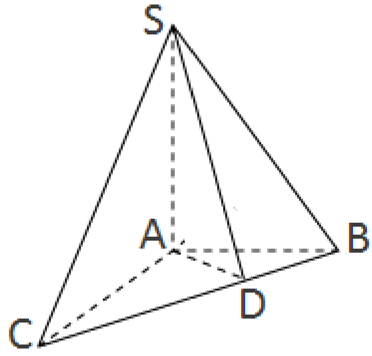
Ответ 288 $см^2$.

Пример 12. Найдите площадь поверхности треугольной пирамиды, у которой каждое ребро √3.

Решение: Поскольку все ребра треугольной пирамиды равны - она является правильной. Площадь поверхности правильной треугольной пирамиды равна S = a^2√3 .
Тогда S = 3√3

Ответ 3√3.

Пример 13. Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной $\sqrt[4]{15}$ см.



Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно к основанию, а два других наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найти площадь боковой грани.

Решение: По условию ΔABC - равносторонний. SA - перпендикуляр к плоскости ABC, $AB=\sqrt[4]{15}$. Так как SA - перпендикулярно плоскости ΔABC, то AB - проекция SB, AC - проекция SC. Отсюда $\angle SBA=\angle SCA=45^\circ$.

Проведем медиану AD (она же и высота) в ΔABC. Соединим точки S и D. По теореме о трех перпендикулярах $BC\perp SD$. $SD>AS$ (гипотенуза ΔASD больше катета).

Так как, $S_{\Delta ASD}=S_{\Delta ASB}=\frac{1}{2}AS\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{15}\cdot AC$, а $S_{\Delta SBC}=\frac{1}{2}SD\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{15}\cdot SD$, то наибольшую площадь имеет грань SBC.

Из ΔASC имеем: $AS=AC\cdot tg45^\circ=\sqrt[4]{15}$.

Из ΔADC имеем: $AD=AC\cdot\sin 60^\circ=\sqrt[4]{15}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

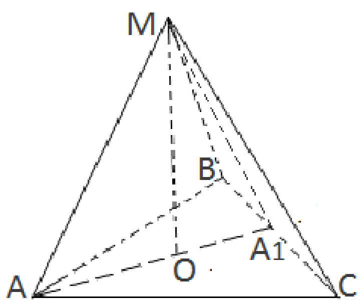
Из ΔASD имеем:

$$SD=\sqrt{AS^2+AD^2}=\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{15}\cdot\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{15}\cdot\sqrt{1+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt[4]{15}\cdot\sqrt{7}}{2}.$$

Тогда площадь: $S_{\Delta SBC}=\frac{1}{2}BC\cdot SD=\frac{1}{2}\sqrt[4]{15}\cdot\sqrt[4]{15}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{105}}{2}$.

Ответ $\frac{\sqrt{105}}{2}$ см^2.

Пример 14. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 2 см, а высота пирамиды 4 см. Найти угол наклона боковых ребер к плоскости основания.



Решение: Рассмотрим правильную треугольную пирамиду ABCM с основанием ABC, AB=BC=AC=2 см, высотой MO=4 см Искомым углом является $\angle MAA_1$.

Вычислим длину AA_1. ΔABC - равносторонний со стороной AC=2 см. Так как $A_1C=1$ см, то есть возможность применить теорему Пифагора для ΔA_1CA, в котором $\angle A_1=90^\circ$:

$AA_1=\sqrt{AC^2-A_1C^2}=\sqrt{3}$.

Воспользуемся далее свойством медиан произвольного треугольника: медианы треугольника пересекаются и точкой пересечения делятся в отношении 1:2. Поэтому $AO=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ см.

Обратим внимание, что для нахождения $\angle MAA_1$ нужно рассмотреть ΔAOM, в котором катет MO=4 см (по условию задачи), второй катет $AO=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (по вычислению).

Так как нам известны длины двух катетов в прямоугольном треугольнике *AOM*, то для нахождения искомого угла обратимся к тангенсу острого угла прямоугольного треугольника. $tgMAA_1 = \frac{MO}{AO} = \frac{4}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Ответ $arctg 2\sqrt{3}$.