## Тема № 60 «Параллелепипед и куб»

### Основные теоретические сведения

*Параллелепипедом* называется призма, у которой основаниями служат параллелограммы.

*Прямым параллелепипедом* называется параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны основаниям.

*Прямоугольным параллелепипедом* называется прямой параллелепипед, основания которого прямоугольники. Длины трёх ребер прямоугольного параллелепипеда, имеющих общий конец, называют его *измерениями.*

Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

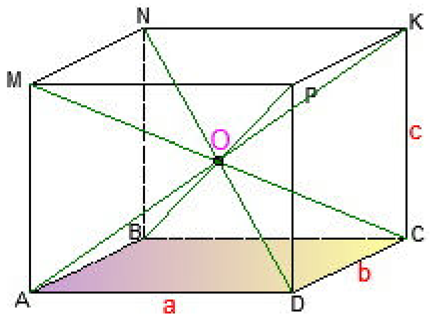
*Кубом* называется прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

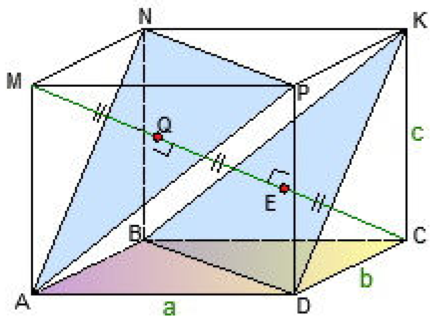
*Прямоугольный параллелепипед (a, b, c –* его измерения, d – диагональ):

$S_б = P_{сеч} \cdot H$, $S_{полн} = 2(ab + ac + bc)$

$V = S_{осн} \cdot H$, $V = abc$, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

*Куб:* $V = a^3$, $S_{полн} = 6a^2$.




*Свойства прямоугольного параллелепипеда и куба :*

1) Все его грани – прямоугольники. Противоположные грани – равные прямоугольники.
2) Параллелепипед симметричен относительно середины его диагонали.
3) Любой отрезок с концами, принадлежащими поверхности параллелепипеда и проходящий через середину его диагонали, делится ею пополам.
4) Все диагонали параллелепипеда равны, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.
5) Точка пересечения диагоналей является центром описанного шара.

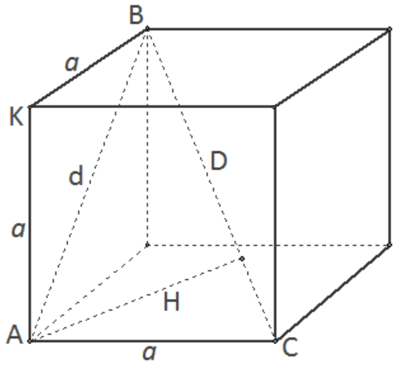
4) Квадрат диагонали АК прямоугольного параллелепипеда равен квадратному корню из суммы квадратов длин его измерений, то есть $AK^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

5) Объем любого прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин его измерений, то есть $V = abc$.

6) Площадь боковой поверхности $S=2ab+2bc+2ac$

7) Объем куба $V = a^3$.

8) Свойство диагоналей куба: диагональ MC куба ABCDMNKP перпендикулярна плоскостям (ANP) и (KBD) и делится этими плоскостями на три равных отрезка: MQ=QE=EC




**Пример 1.** Ребро куба равно 3. Найти расстояние от вершины куба до его диагонали, соединяющей две другие вершины.

Решение: Найдем расстояние H от вершины куба A до диагонали BC = D.

Из $\Delta$AKB: $d^2 = a^2 + a^2 = 9 + 9 = 18$, $d = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Из $\Delta$ABC: $D^2 = d^2 + a^2 = 18 + 9 = 27$, $D = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

Из прямоугольного $\Delta$ABC: $S = ½\, a d = ½ \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} = ½ \cdot 9\sqrt{2}$

$S = ½\, DH = ½ \cdot 3\sqrt{3} H = ½ \cdot 9\sqrt{2}$,

$H = 3\sqrt{2}/\sqrt{3} = \sqrt{6}$.

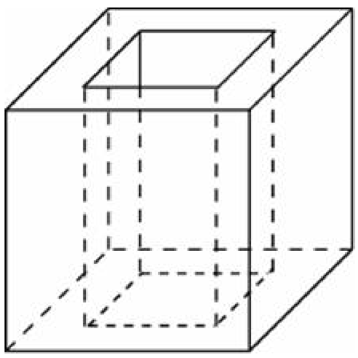
Ответ $\sqrt{6}$.

**Пример 2.** Прямоугольный параллелепипед и куб имеют равные площади поверхности. Длина параллелепипеда равна 18 м, что в 2 раза больше его ширины и на 8 м больше его высоты. Найти ребро куба.

Решение: Измерения параллелепипеда: ширина 18/2=9 м, высота 18-8=10 м, длина 18 м. $S = 9\cdot10\cdot2 + 9\cdot18\cdot2 + 10\cdot18\cdot2 = 180 + 324 + 360 = 864$, $864/6 = 144$, $a^2 = 144$, $a = 12$ м – ребро куба.

Ответ 12.

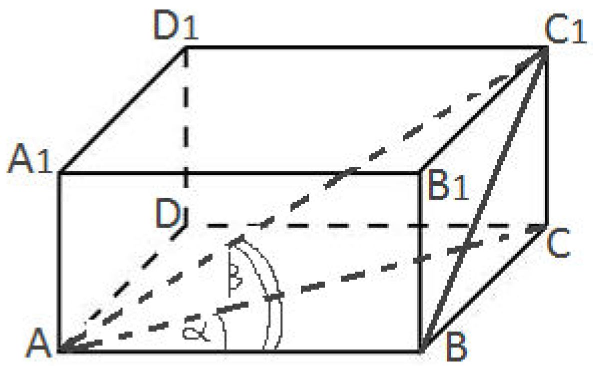
**Пример 3.** Из единичного куба вырезана правильная четырехугольная призма со стороной основания 0,5 и боковым ребром 1. Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.



Решение: Площадь поверхности получившегося многогранника равна сумме площадей 6-ти граней куба со стороной 1, четырех граней параллелепипеда со сторонами 1 и 0,5 минус 2 площади основания вырезанной призмы:

$S = 6 + 4(0,5\cdot1) - 2(0,5\cdot0,5) = 7,5$.

Ответ: 7,5.




**Пример 4.** Дан прямоугольный параллелепипед. Угол между диагональю основания и одной из его сторон равен $\alpha$. Угол между этой стороной и диагональю параллелепипеда равен $\beta$. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если диагональ основания равна k.

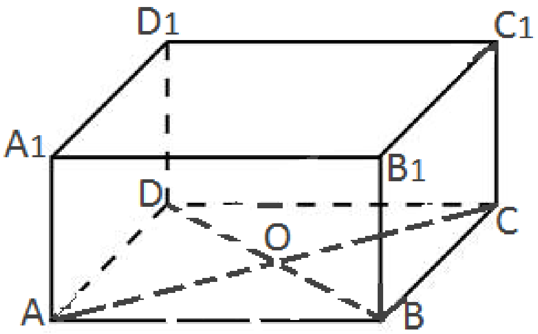
Решение: $\Delta$ABC – прямоугольный:

$AB = k\cdot\cos\alpha$, $BC = k\cdot\sin\alpha$. Периметр основания $P_{осн} = 2k(\cos\alpha + \sin\alpha)$.

Прямая AB перпендикулярна плоскости грани $BCC_1B_1$, так как она перпендикулярна пересекающимся прямым BC и $BB_1$ этой плоскости. Поэтому $AB \perp BC_1$, т.е. $\Delta BAC_1$ – прямоугольный, и $BC_1 = AB\cdot tg\beta = k\cos\alpha\, tg\beta$.

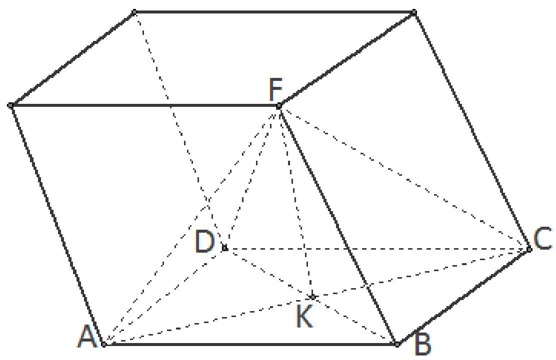
Из прямоугольного $\Delta\, BCC_1$: $CC_1^2 = BC_1^2 - BC^2 = (k\cos\alpha\, tg\beta)^2 - (k\sin\alpha)^2$ ,

$CC_1^2 = k^2 (\cos^2\alpha\, tg^2\beta - \sin^2\alpha)$, $CC_1 = k\cdot\sqrt{(\cos^2\alpha\, tg^2\beta - \sin^2\alpha)}$
Следовательно, $S_б = P_{осн}\cdot CC_1$
$S_б = 2k(\cos\alpha + \sin\alpha)\cdot k\cdot\sqrt{(\cos^2\alpha\, tg^2\beta - \sin^2\alpha)} = 2k^2(\cos\alpha + \sin\alpha)\sqrt{(\cos^2\alpha\, tg^2\beta - \sin^2\alpha)}$.
Ответ $2k^2(\cos\alpha + \sin\alpha)\sqrt{(\cos^2\alpha\, tg^2\beta - \sin^2\alpha)}$.




**Пример 5.** В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, диагонали которого равны 12 см и 16 см. Высота параллелепипеда — 8 см. Найдите площадь его полной поверхности.
Решение: Диагонали ромба перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. По теореме Пифагора сторона основания
$AB = \sqrt{(AO^2 + OB^2)} = \sqrt{(6^2 + 8^2)} = 10$ см, поэтому периметр ромба равен 40 см.
Боковая поверхность $S_б = P_{осн}\cdot CC_1 = 40 \cdot 8 = 320$ см$^2$.
Площадь ромба $S_{ромба} = 2S_{\Delta ABC} = 2\cdot(AC\cdot OB)/2 = AC\cdot OB = 16\cdot 6 = 96$ см$^2$.
Площадь полной поверхности $S_{пп} = 2S_{ромба} + S_б = 2\cdot 96 + 320 = 512$ см$^2$.
Ответ 512.

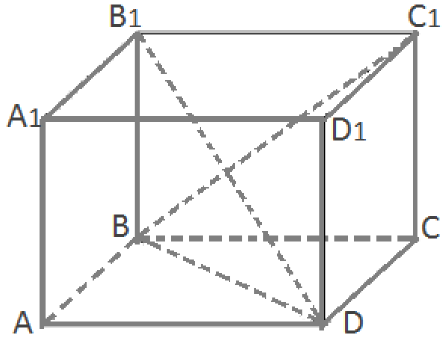
**Пример 6.** Основанием параллелепипеда служит квадрат. Одна из вершин его верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Определите высоту параллелепипеда, если диагональ основания равна 8 см, а боковое ребро равно 5 см.




Решение: Поскольку одна из вершин основания параллелепипеда (обозначим ее F) одинаково удалена от всех вершин нижнего основания параллелепипеда, то вместе с диагональю нижнего основания (обозначим ее AC) она образует равнобедренный $\Delta AFC$. AF = FC по условию. Одновременно, BF - это ребро параллелепипеда.

Таким образом, в равнобедренном треугольнике AFC стороны равны следующим величинам: AF=FC=5 см , AC = 8 см.
Высота FK равнобедренного $\Delta$ AFC одновременно, будет являться высотой параллелепипеда. Кроме того, высота равнобедренного треугольника делит его основание пополам. Откуда, по теореме Пифагора высота будет равна:
$FK^2 + (AC/2)^2 = FC^2$
$FK^2 + 16 = 25$
$FK^2 = 9$
FK = 3 см
Ответ 3.

**Пример 7.** Найти площадь основания ABCD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ , если $DB_1 = 6$ см, $DB = 5$ см, $BC_1 = 4$ см.




Решение: Для нахождения длин сторон (поскольку параллелепипед прямоугольный, а значит, все ребра пересекаются под прямым углом ) используем теорему Пифагора.

В прямоугольном $\Delta$ $DBB_1$ :

$BB_1 = \sqrt{(B_1D^2 - BD^2)}$

$BB_1 = \sqrt{(36 - 25)} = 3$, причем $BB_1 = CC_1 = 3$.

В прямоугольном $\Delta\, BC_1C$ :

$BC = \sqrt{(BC1^2 – C_1C^2)}$, $BC = \sqrt{(16 - 9)} = \sqrt{7}$

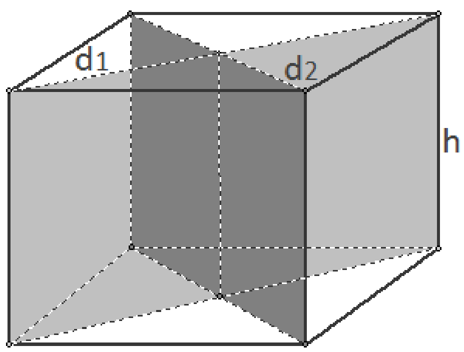
В $\Delta BCD$: $CD = \sqrt{(BD^2 - BC^2)}$, $CD = \sqrt{(25 - 7)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Откуда площадь основания параллелепипеда равна:

$S = BC \cdot CD = \sqrt{7} \cdot 3\sqrt{2} = 3\sqrt{14}$

Ответ $3\sqrt{14}$

**Пример 8.** Основание прямоугольного параллелепипеда - ромб. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площади его диагональных сечений равны P и Q .




Решение:

Площадь первого сечения выразим как

$P = hd_1$ , где h - высота параллелепипеда, $d_1$ - длина диагонали.

Площадь второго сечения выразим как

$Q= hd_2$ , где h - высота параллелепипеда, $d_2$ - длина диагонали.

Соответственно, $d_1 = P/h$, $d_2 = Q/h$.

Площадь боковой поверхности равна $S = 4ah$, где $a$ - длина стороны ромба, h - высота параллелепипеда.

По теореме Пифагора $a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$, $a = \frac{\sqrt{d_1^2+d_2^2}}{2}$

Тогда

$S_б = 4ah$, $S_б = \frac{4h\sqrt{d_1^2+d_2^2}}{2} = 2h\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

$$S_б = 2h\sqrt{\left(\frac{P}{h}\right)^2 + \left(\frac{Q}{h}\right)^2}$$

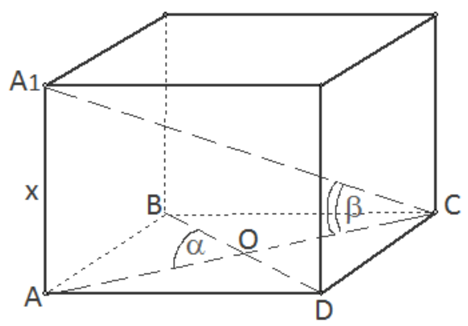
$$S_б = 2\sqrt{P^2 + Q^2}$$

Ответ $S = 2\sqrt{(P^2 + Q^2)}$.

**Пример 9.** Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен $\alpha$. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол $\beta$. Найти высоту параллелепипеда, если его объем V.

Решение: Пусть высота $AA_1 = x$.

$\Delta A_1AC$: $tg\beta = x/AC$, т.е. $AC = x \cdot ctg\beta$.




Основание – прямоугольник, в котором диагонали равны: AC = BD.

Из курса планиметрии: $S = ½\ AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$; $S = ½\ (x \cdot ctg\beta)^2 \cdot \sin\alpha$.

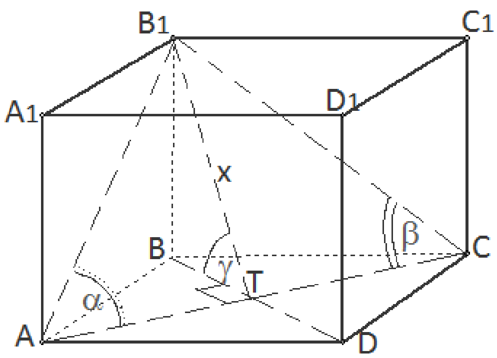
Подставим все, что нашли в формулу: $V = S_{осн} \cdot H$ и выразим высоту $AA_1 = x$:

$V = ½\ (x \cdot ctg\beta)^2 \cdot \sin\alpha \cdot x$ ;   $V = ½\ x^3 \cdot ctg^2\beta \cdot \sin\alpha$ ;

$x = \sqrt[3]{\frac{2V}{ctg^2\beta\sin\alpha}}$.

Ответ $x = \sqrt[3]{\frac{2V}{ctg^2\beta\sin\alpha}}$.

**Пример 10.** Диагонали $AB_1$ и $CB_1$ двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составляют с диагональю AC основания ABCD углы, соответственно $\alpha$ и $\beta$. Найти угол между плоскостью треугольника $AB_1C$ и плоскостью основания.




Решение: Обозначим искомый угол $\angle B_1TB = \gamma$; а отрезок $B_1T = x$.

$\Delta ATB_1$ : $tg\alpha = x/AT$, т.е. $AT = x \cdot ctg\alpha$.

$\Delta CTB_1$ : $tg\beta = x/CT$, т.е. $CT = x \cdot ctg\beta$.

$\Delta ABC$ : $\angle B = 90^\circ$, по формулам планиметрии $BT^2 = AT \cdot CT$, т.е.

$BT = \sqrt{x \cdot ctg\alpha \cdot x \cdot ctg\beta} = x\sqrt{ctg\alpha \cdot ctg\beta}$

$\Delta B_1BT$: $\angle B_1BT = 90^\circ$, $\cos\gamma = BT/B_1T = BT/x = x\sqrt{ctg\alpha \cdot ctg\beta}/x = \sqrt{ctg\alpha \cdot ctg\beta}$.

Значит, $\gamma = \arccos\sqrt{ctg\alpha \cdot ctg\beta}$.

Ответ $\arccos\sqrt{ctg\alpha \cdot ctg\beta}$.