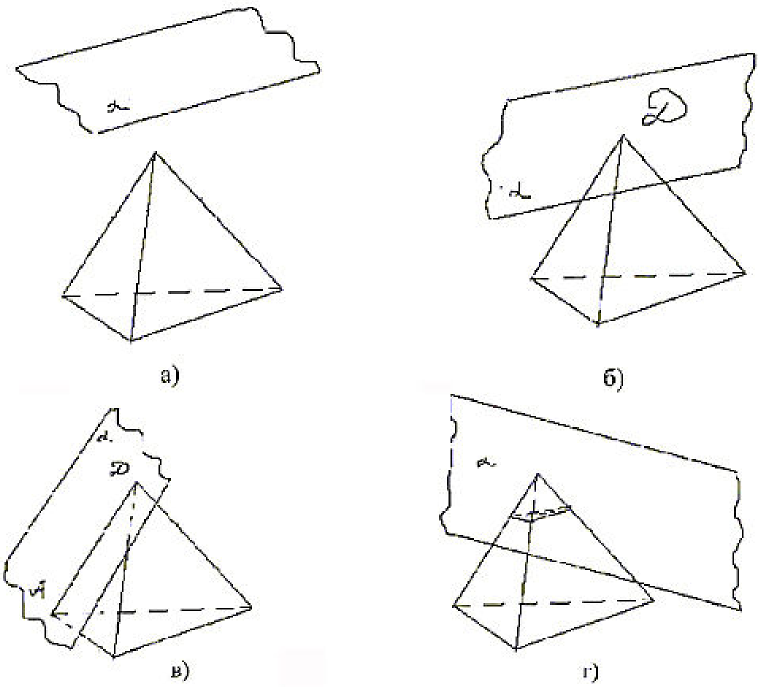
Тема № 62 «Сечения многогранников»

1. Способы задания плоскости:
   - тремя точками, не лежащими на одной прямой;
   - прямой и точкой, не лежащей на прямой;
   - двумя параллельными прямыми;
   - двумя пересекающимися прямыми.

2. Варианты расположения относительно друг друга многогранника и плоскости:

Задача состоит в построении пересечения двух фигур: многогранника и плоскости (рис.1). Это могут быть: пустая фигура (а), точка (б), отрезок (в), многоугольник (г).



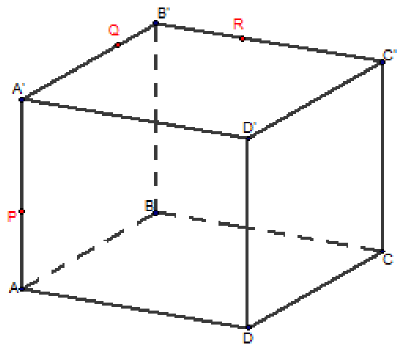
Если пересечение многогранника и плоскости есть многоугольник, то этот многоугольник называется ***сечением многогранника плоскостью.***

3. Когда задача на построение сечения многогранника плоскостью считается решенной?

Будем рассматривать только случай, когда плоскость пересекает многогранник по его внутренности. При этом пересечением данной плоскости с каждой гранью многогранника будет некоторый отрезок. Таким образом, *задача считается решенной, если найдены все отрезки, по которым плоскость пересекает грани многогранника.*

4. Какие фигуры получаются в сечении треугольной пирамиды плоскостью?
   Ответ точка, отрезок, треугольник, четырехугольник.
5. Какие фигуры получаются в сечении куба плоскостью?
   Ответ точка, отрезок, треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник.

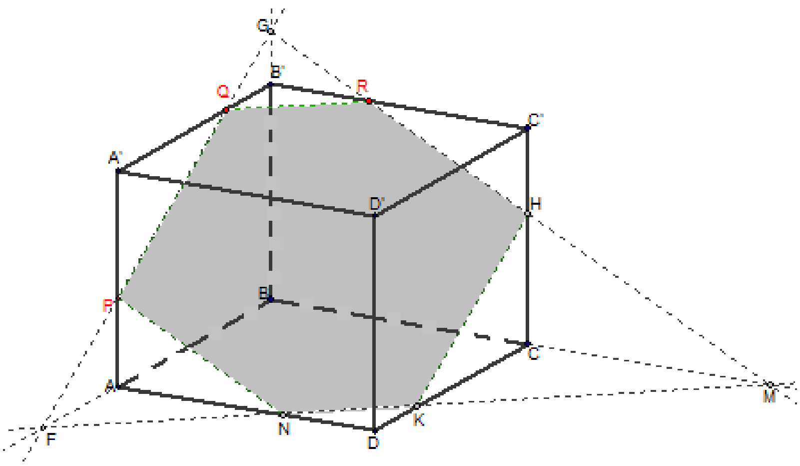
6. Может ли в сечении пирамиды плоскостью получиться а) пятиугольник, б) шестиугольник?
   Ответ а) и б) нет.
7. Чему равно наибольшее число сторон многоугольника, полученного сечением многогранника с плоскостью?
   Ответ *наибольшее число сторон многоугольника, полученного в сечении многогранника плоскостью, равно числу граней многогранника.*



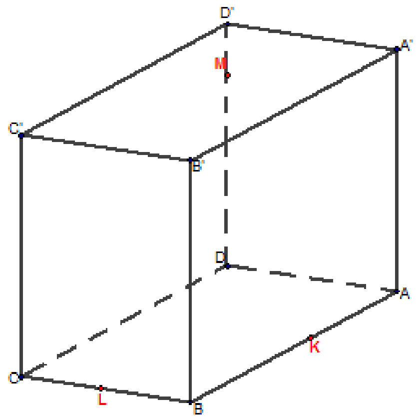
8. Построить сечение (PQR) параллелепипеда. Все точки лежат на ребрах двух смежных граней.

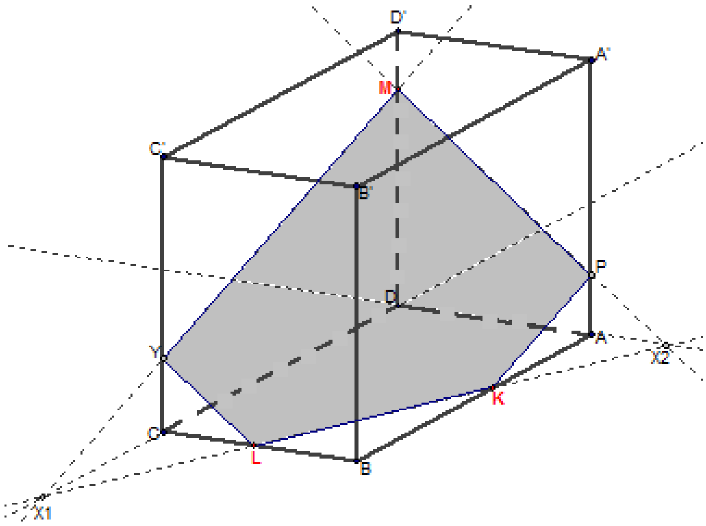
Построение:

1) Строим PQ и QR
2) $PQ \cap BA = F$, $PQ \cap BB' = G$
3) $GR \cap CC' = H$, $GR \cap BC = M$
4) $FM \cap AD = N$, $FM \cap DC = K$
5) PQRHKN – искомое сечение.

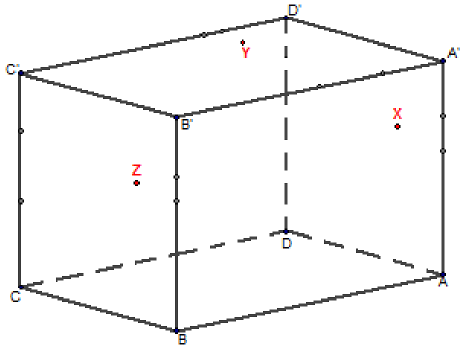


9. Построить сечение параллелепипеда (MLK). Точки K и L лежат на ребрах нижнего основания AB и CB соответственно, а точка M принадлежит боковому ребру DD'.
   Построение:
   1) $KL \cap DC = X1$
   2) $MX1 \cap CC' = Y$
   3) $LK \cap AD = X2$
   4) $MX2 \cap AA' = P$
   6) LYMPK – искомое сечение.



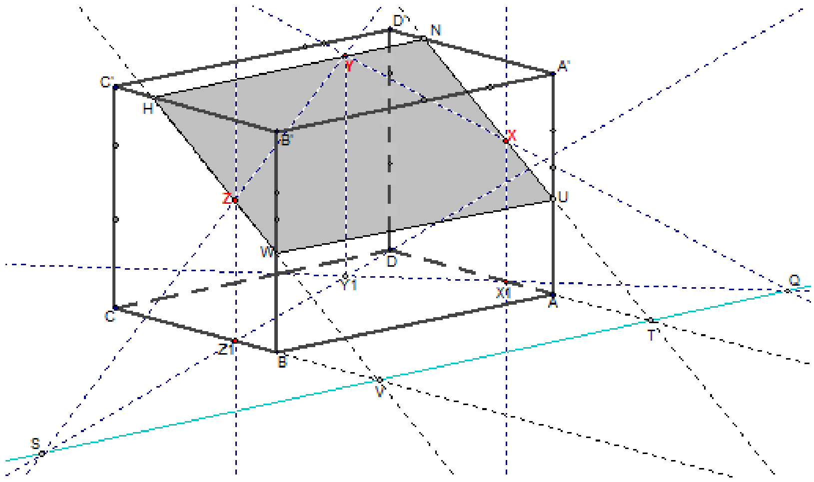


10. Построить сечение параллелепипеда (XYZ) методом следов, если точки X, Y, Z лежат на трех смежных гранях.



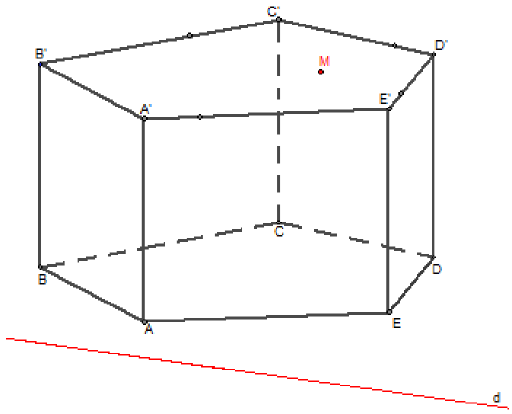
Построение:

1) ZZ1 | | YY1 | | XX1
2) XY ∩ X1Y1 = Q
3) YZ ∩ Y1Z1 = S
4) QS – след
5) DA ∩ QS = T



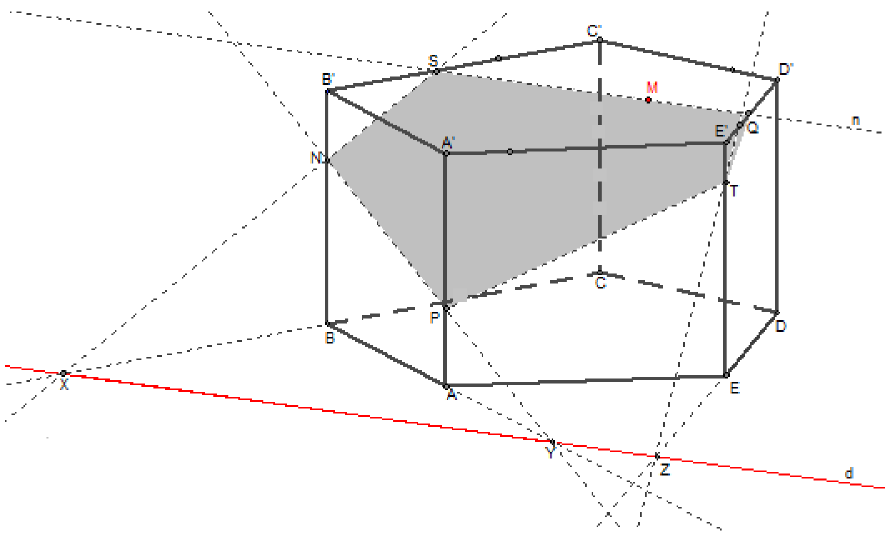
6) XT∩AA' = U, XT∩A'D' = N
7) CB ∩ QS = V
8) ZV∩BB' =W, ZV∩C'B'= H
9) HNUW – искомое сечение.

11. Построить сечение (M,d) призмы. Точка M принадлежит верхнему основанию, прямая d лежит в плоскости нижнего основания.

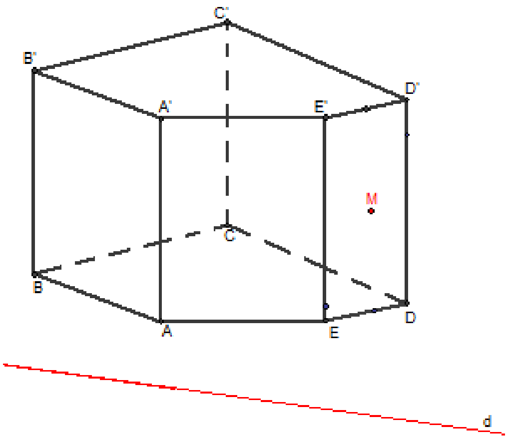


Построение:

1) Через т.M проведем прямую n||d
2) n ∩ B'C' = S, n ∩ E'D' = Q
3) CB ∩ d = X, BA ∩ d = Y, DE ∩ d = Z
4) SX ∩ BB' = N



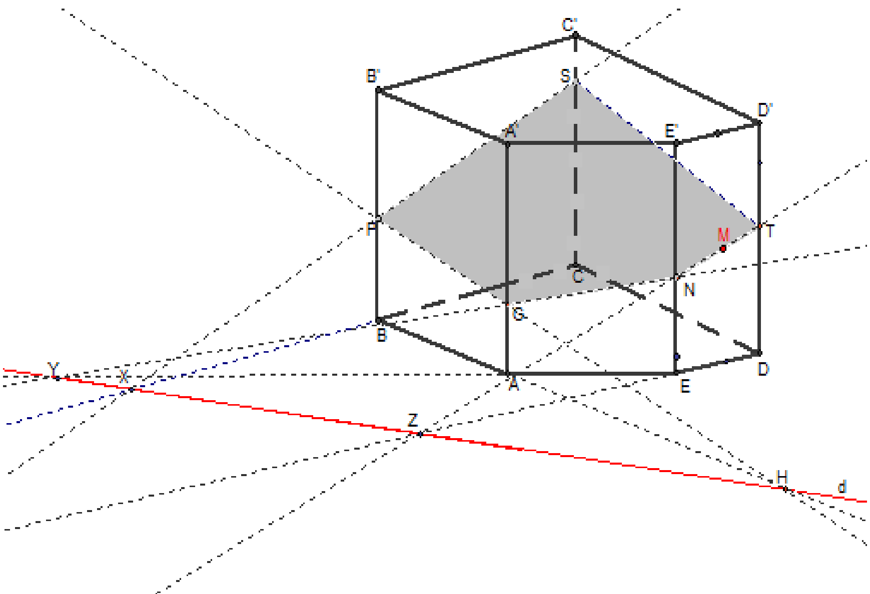
5) QZ ∩ EE' = T
6) NY ∩ AA' = P
7) SNPTQ – искомое сечение.



12. Построить (M,d) сечение призмы. Точка M принадлежит боковому основанию, прямая d лежит в плоскости нижнего основания.

Построение:

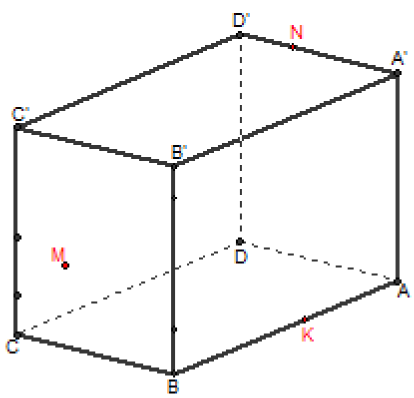
1) CB ∩ d =X, EA ∩ d =Y, DE ∩ d =Z, BA ∩ d =H
2) MZ ∩EE' = N, MZ ∩ DD' = T
3) NY ∩ AA' = G
4) GH ∩ BB' = P
5) PX ∩ CC' = S
6) PSTNG –искомое сечение.



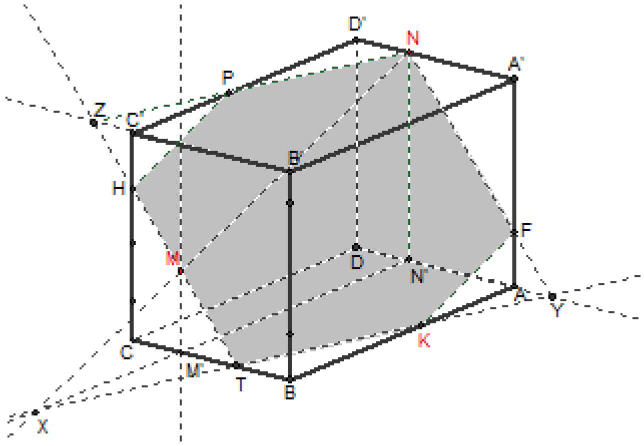
13. Построить сечение (MNK), если M принадлежит грани BB'C'C, а N и K лежат на ребрах A'D' и AB соответственно.

Построение:

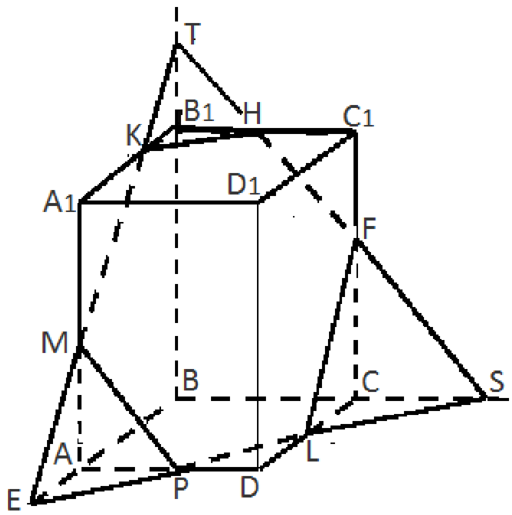
1) N' – проекция N, M'– проекция M
2) NM ∩ N'M' = X
3) KX ∩ BC = T, KX ∩ DA = Y



4) TM ∩ CC' = H, TM ∩ B'C' = Z
5) ZN ∩ C'D' = P
6) NY ∩ AA' = F
7) THPNFK –искомое сечение.



14. Ребро куба равно *a*. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1, AD и A_1B_1.



Решение: Обозначим названные в условии середины ребер соответственно через *M*, *P*, *K*.

Продолжим отрезок *MK* до его пересечения в точках *T* и *E* с продолжениями ребер BB_1 и *BA*. Через точки *E* и *P* проведем прямую до ее пересечения в точке *S* с продолжением ребра *BC*. Наконец проведем прямую через точки *S* и *T*. В итоге получается сечение куба в виде многоугольника с вершинами в точках *K*, *M*, *P*, *L*, *F*, *H*. Заметим, что противоположные стороны этого многоугольника параллельны, так как лежат на пересечении параллельных граней плоскостью сечения.

Из равенства треугольников KB_1T, KA_1M и *MAE* следует, что $AE=B_1T=\frac{a}{2}$, а из равенства треугольников *AEP* и *PDL* можно заключить, что DL-$LC=CS=\frac{a}{2}$. Поэтому $BT=BS$ и $\angle THB_1=\angle FSC=45°$.

Отсюда следует, что точки *H* и *F* – середины ребер куба, из чего в свою очередь следует, что каждая из сторон многоугольника в сечении куба равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Так как *AM*=*AP*=*AE*, то треугольник равносторонний, и $\angle MPE=60°$. Поэтому $\angle MPL=120°$. По тем же причинам каждый из остальных углов сечения равен 120°.

Итак, сечение куба представляет правильный шестиугольник со стороной, равной $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

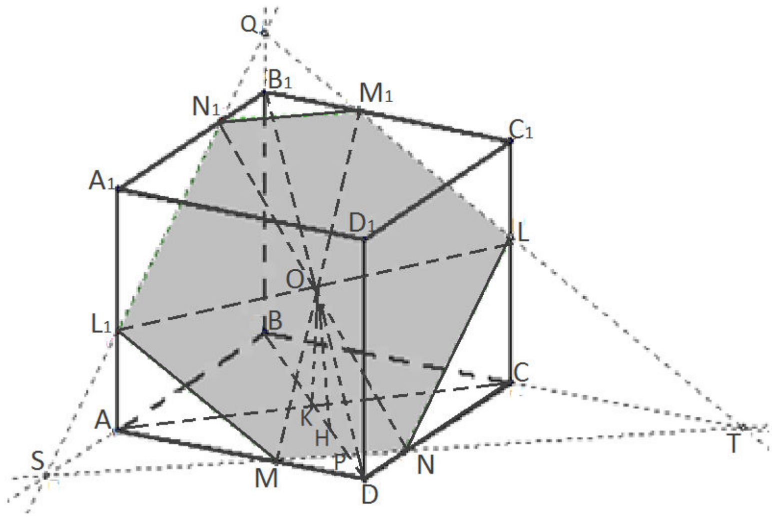
По формуле площади правильного шестиугольника ($S=\frac{3b^2\sqrt{3}}{2}$, где b - длина стороны) находим, что искомая площадь равна:

$$S=\frac{3\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ (кв. ед.)

15. Найти площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $A \ldots D_1$, проходящего через середины M, N, L ребер AD, DC, CC_1 соответственно, если $AA_1 = 1$, AB = 2, AD = 3.

Решение:



Построение сечения:

1. $MN \cap BC = T$, $MN \cap AB = S$

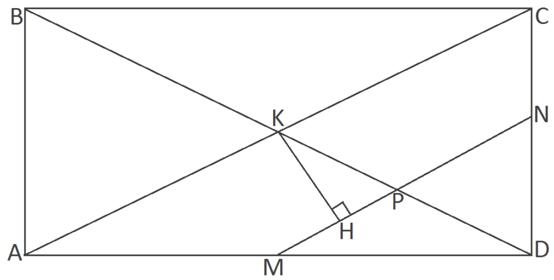
2. $TL \cap B_1C_1 = M_1$, $TL \cap BB_1 = Q$

3. $SQ \cap AA_1 = L_1$, $SQ \cap A_1B_1 = N_1$

$MNLM_1N_1L_1$ – искомое сечение.

Площадь данного сечения будем искать по формуле площади проекции: $S_{сеч} = S_{пр}/\cos\alpha$, где α - угол между плоскостью сечения и ABCD.

При этом в силу симметрии сечения, будем искать только половину площади проекции. Т.е. ACMN – проекция $MNLL_1$.



$\frac{1}{2}S_{пр} = S_{ACMN} = S_{ADC} - S_{MDN} = 0{,}75S_{ADC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} AD \cdot DC = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\, 6 = 2{,}25$.

Тогда вся проекция имеет площадь $S_{пр} = 4{,}5$.

При определении угла α <u>ошибочно</u> считают, что это угол $\angle OPK$.

Проведем $KH \perp MN$, тогда $\angle OHK = \alpha$.

Имеем $KP = \frac{1}{4}BD = \frac{1}{4}\sqrt{13}$,

$KH = KP\sin(\angle KPH) = KP \sin(2\angle BDA) = \frac{1}{4}\sqrt{13} \cdot 2 \cdot 2/\sqrt{13} \cdot 3/\sqrt{13} = 3/\sqrt{13}$,

$\mathrm{tg}\alpha = OK/ KH = \sqrt{13}/6$.

Тогда $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{6}{7}$. Теперь окончательно находим

$S_{сеч} = S_{пр}/\cos\alpha = 4{,}5 : 6/7 = 63/12 = 21/4 = 5{,}25$.

Ответ 5,25.