Тема № 63 «Цилиндр»

Основные теоретические сведения

Прямым круговым цилиндром называется тело, полученное вращением прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон.

Цилиндром называется тело, которое состоит из двух кругов, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов.

Круги называются *основаниями* цилиндра. Отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, – *образующими* цилиндра.

Основания цилиндра равны и лежат в параллельных плоскостях. У цилиндра образующие параллельны и равны.

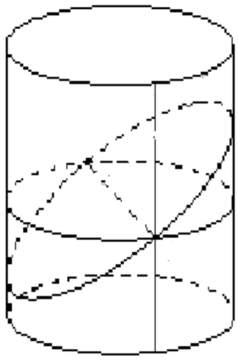
Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность составлена из образующих.

Цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

Радиусом цилиндра называется радиус его основания.

Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований.



Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется *осевым сечением.*

Сечениями цилиндра могут быть: прямоугольник, круг, эллипс и парабола.

Плоскость, проходящая через образующую прямого цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется *касательной плоскостью цилиндра*.

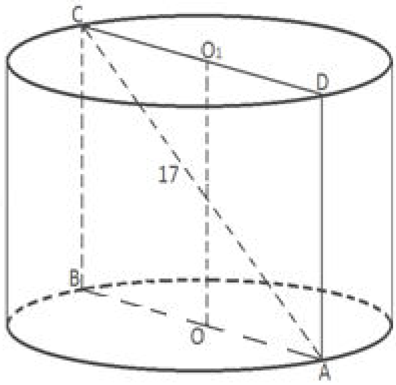
Призмой, вписанной в цилиндр, называется такая призма, основания которой – равные многоугольники, вписанные в основание цилиндра. Ее боковые ребра являются образующими цилиндра.

Призма называется описанной около цилиндра, если ее основания – равные многоугольники, описанные около оснований цилиндра. Плоскости ее граней касаются боковой поверхности цилиндра.

Цилиндр (R - радиус основания, H - высота):

$V = \pi R^2 H$

$S_б = 2\pi RH \quad S_{пп} = 2\pi R(R + H)$



Пример 1. Длина окружности основания прямого цилиндра равна 8π см, а диагональ осевого сечения – 17 см. Найдите образующую цилиндра.

Решение: Образующая прямого цилиндра равна высоте цилиндра BC.

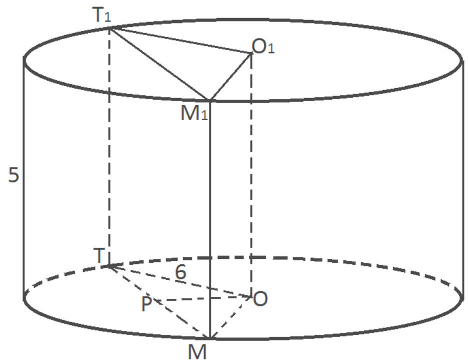
$2\pi R = 8\pi \Rightarrow R = 4$, $AB = 2R = 8$.

Из прямоугольного ΔABC: $BC = \sqrt{(AC^2 - AB^2)}$

$BC = \sqrt{(17^2 - 8^2)} = 15$ см.

Ответ 15.

Пример 2. В цилиндре высоты 5 и радиуса 6 проведено сечение, параллельное оси и отсекающее от окружности основания дугу в 120º. Определить площадь этого сечения.

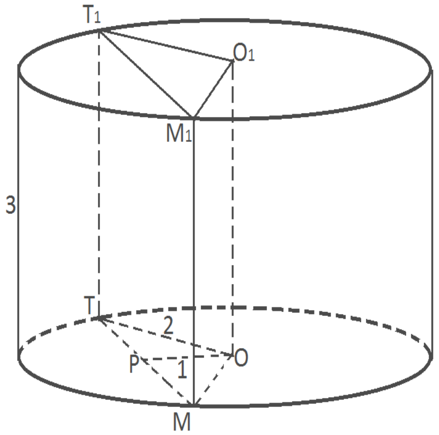


Решение: Сечение цилиндра – прямоугольник MTT_1M_1, две стороны которого – образующие и поэтому равны высоте цилиндра, т.е. $MM_1 = TT_1 = 5$. Рассмотрим основание цилиндра – круг радиуса 6 с центром в точке O. Сечение, по условию, пересекает основание по отрезку MT. Так как по условию дуга MT равна 120º, то центральный угол $\angle MOT = 120º$. Опустим из точки O перпендикуляр OP на хорду MT. Треугольник MOT равнобедренный и его высота OP является медианой и биссектрисой. Следовательно, MP = PT и $\angle POT = 60º$.

$PT = OT \cdot \sin 60º = 6 \cdot \sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}$. Тогда $MT = 2PT = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Площадь сечения $S = MT \cdot TT_1 = 6\sqrt{3} \cdot 5 = 30\sqrt{3}$.

Ответ $30\sqrt{3}$.

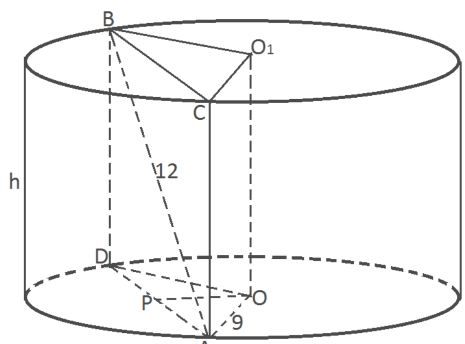


Пример 3. Высота цилиндра равна 3, а радиус основания – 2. Найти площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и удаленной от нее на расстояние 1.

Решение: Сечение цилиндра – прямоугольник MTT_1M_1, две стороны которого – образующие и поэтому равны высоте цилиндра, т.е. $MM_1 = TT_1 = 3$. Рассмотрим основание цилиндра – круг радиуса 2 с центром в точке O. Сечение, по условию, пересекает основание по отрезку MT. Опустим из точки O перпендикуляр OP на хорду MT. По условию OP = 1. Треугольник MOT равнобедренный и его высота OP является медианой и биссектрисой, поэтому MP = PT. По теореме Пифагора: $PT = \sqrt{(OT^2 - OP^2)} = \sqrt{(4 - 1)} = \sqrt{3}$. Тогда $MT = 2PT = 2\sqrt{3}$.

Площадь сечения $S = MT \cdot TT_1 = 2\sqrt{3} \cdot 3 = 6\sqrt{3}$.

Ответ $6\sqrt{3}$.



Пример 4. Концы отрезка AB лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус цилиндра равен r, его высота – h, а расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно d. Найти высоту цилиндра, если r = 9 дм, d = 7дм, AB = 12 дм.

Решение: Через точку A, лежащую на окружности основания с центром в точке O, проведем образующую. Пусть она пересекает окружность основания с центром в точке O_1 в точке C. Плоскость ABC параллельна оси OO_1 цилиндра, поэтому расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно расстоянию от оси до плоскости ABC, т.е. опущенный перпендикуляр OP = d.

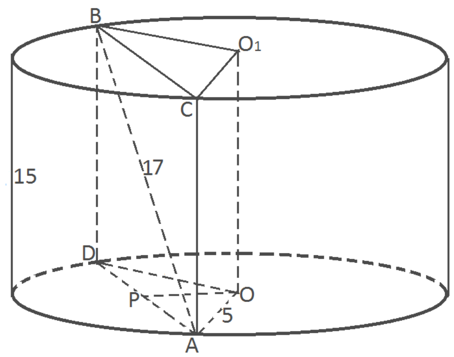
Из прямоугольного ΔOAP находим $AP = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{r^2 - d^2}$.

ΔDOA – равнобедренный, поэтому $AD = 2AP = 2\sqrt{r^2 - d^2}$.

Из прямоугольного ΔABD находим $h = BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{AB^2 - 4r^2 + 4d^2}$;

$h = \sqrt{12^2 - 4\cdot 9^2 + 4\cdot 7^2} = \sqrt{144 - 324 + 196} = 4$.

Ответ 4.



Пример 5. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, диагональ которого равна 17 см, высота цилиндра равна 15 см, а радиус основания 5 см. На каком расстоянии от оси проведено это сечение?

Решение: Сечение цилиндра – это прямоугольник. Плоскость ABC параллельна оси OO_1 цилиндра, поэтому расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно расстоянию от оси до плоскости ABC, т.е. опущенный перпендикуляр OP – искомое расстояние.

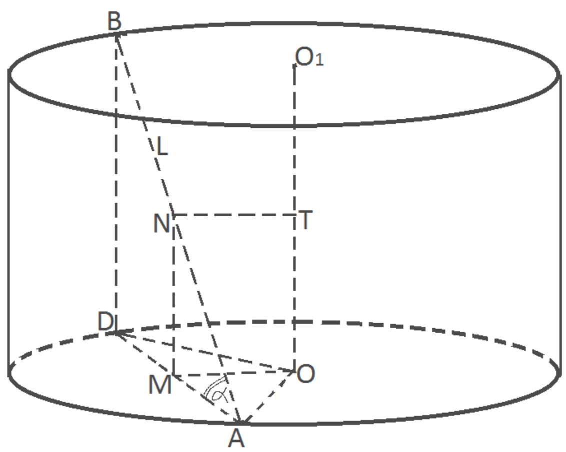
Из прямоугольного ΔABD найдем $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{64} = 8$ см.

ΔDOA – равнобедренный, поэтому AP = ½ AD = ½ 8 =4 см.

Из прямоугольного ΔOAP найдем $OP = \sqrt{OA^2 - AP^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ см.

Ответ 3.

Пример 6. Отрезок прямой, соединяющий точку окружности верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, равен L и составляет с плоскостью основания угол α. Найти расстояние от этой прямой до оси цилиндра, если осевое сечение цилиндра – квадрат.



Решение: Плоскость ABD параллельна оси OO_1 цилиндра, поэтому расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно расстоянию от оси до плоскости ABD, т.е. опущенный перпендикуляр OM = NT – искомое расстояние.

Из прямоугольного ΔABD:

$BD = L\sin\alpha \Rightarrow OD = OA = \frac{1}{2} L\sin\alpha$

$AD = L\cos\alpha$. Но т.к. ΔDOA – равнобедренный, поэтому $AM = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} L\cos\alpha$

Из прямоугольного ΔOAM найдем $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{(\frac{1}{2} L\sin\alpha)^2 - (\frac{1}{2} L\cos\alpha)^2}$

$OM = \frac{1}{2} L\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{1}{2} L\sqrt{-\cos 2\alpha} \Rightarrow \cos 2\alpha \le 0$

$\Leftrightarrow 90^\circ \le 2\alpha < 180^\circ \Leftrightarrow 45^\circ \le \alpha < 90^\circ$.

Ответ $\frac{1}{2} L\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $45^\circ \le \alpha < 90^\circ$.