## Тема № 66 «Площадь поверхности тел вращения»

### Основные формулы

Цилиндр

$S_б = 2\pi RH$; $S_{пп} = 2\pi R(R + H)$ (R – радиус основания, H – высота)

Конус

$S_б = \pi RL$; $S_{пп} = \pi RL + \pi R^2$ (R – радиус основания, L – образующая)

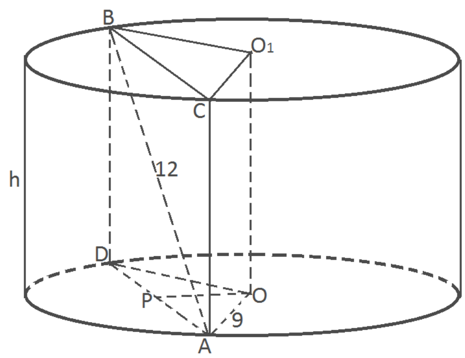
Усеченный конус

$S_б = \pi(R+r)L$; $S_{пп} = \pi(R+r)L + \pi R^2 + \pi r^2$ (R, r – радиусы оснований)

Шар

$S_п = 4\pi R^2$; $S_{сегм} = 2\pi RH$ (R – радиус, H – высота сегмента)

### Цилиндр




**Пример 1.** Концы отрезка AB лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус цилиндра равен r, его высота – h, а расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно d. Найти площадь боковой поверхности цилиндра, если r = 9 дм, d = 7дм, AB = 12 дм.

Решение: $S_б = 2\pi rh$. Для решения задачи надо найти высоту h = BD.

Через точку A, лежащую на окружности основания с центром в точке O, проведем образующую. Пусть она пересекает окружность основания с центром в точке $O_1$ в точке C. Плоскость ABC параллельна оси $OO_1$ цилиндра, поэтому расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно расстоянию от оси до плоскости ABC, т.е. опущенный перпендикуляр OP = d.

Из прямоугольного $\Delta OAP$ находим $AP = \sqrt{(OA^2 - OP^2)} = \sqrt{(r^2 - d^2)}$.

$\Delta DOA$ – равнобедренный, поэтому $AD = 2AP = 2\sqrt{(r^2 - d^2)}$.

Из прямоугольного $\Delta ABD$ находим $h = BD = \sqrt{(AB^2 - AD^2)} = \sqrt{( AB^2 - 4r^2 + 4d^2)}$;

$h = \sqrt{( 12^2 - 4\cdot 9^2 + 4\cdot 7^2)} = \sqrt{(144 - 324 + 196)} = 4$.

Тогда площадь боковой поверхности цилиндра $S_б = 2\pi RH = 2\pi\cdot 9\cdot 4 = 72\pi$.

Ответ $72\pi$.

**Пример 2.** Площадь боковой поверхности цилиндра равна S. Найти площадь его осевого сечения.

Решение: В этой задаче чертеж не обязателен. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_б = 2\pi RH$, а площадь осевого сечения $S_{сеч} = 2RH$.

По условию $2\pi RH = S$, отсюда $2RH = S/\pi$.

Ответ $S/\pi$.

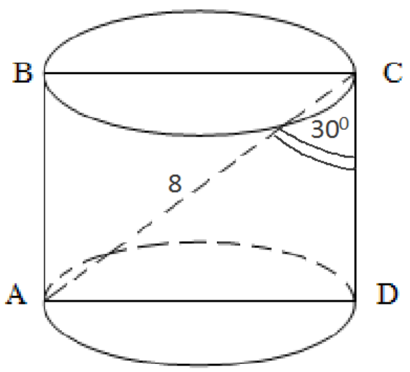
**Пример 3.** Рассматриваются все цилиндры, имеющие периметр осевого сечения, равный 2p. Найти высоту того цилиндра, который имеет наибольшую площадь боковой поверхности.

Решение:

1) Обозначим r и h радиус и высоту цилиндра, периметр осевого сечения которого равен 2р. Тогда $2r + h = p \Rightarrow 2r = p - h$.
2) Площадь боковой поверхности цилиндра выразим по формуле
   $S = 2\pi rh = \pi h(p - h) = \pi(ph - h^2)$, где $0 < h < p$.
   Величина S меняется в зависимости от h и , следовательно, является функцией h, при условии $0 < h < p$. В нашем случае функция площадь боковой поверхности является квадратичной функцией от h. Из свойств квадратичной функции с отрицательным старшим коэффициентом следует, что такая функция достигает своего наибольшего значения при $h = [x = -b/2a]= -p/(-2) = p/2$.
3) Итак, при заданном периметре осевого сечения, наибольшую площадь боковой поверхности будет иметь тот цилиндр, у которого высота равна четверти периметра осевого сечения.
   Ответ $h = p/2$.

**Замечание.** Посмотрим, как относятся высота и диаметр цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности, при заданном периметре осевого сечения. Мы знаем, что высота h такого цилиндра равна четверти периметра осевого сечения, т.е. $h = p/2$. Подставим это значение в равенство $2r + h = p$. Получим $2r + p/2 = p$; $p/2 = 2r$, т.е. $2r = h$. Следовательно, осевое сечение цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности, при заданном периметре осевого сечения, – квадрат.

**Пример 4.** Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если диагональ его осевого сечения, равная 8 см, составляет с образующей цилиндра угол величиной 30 градусов.



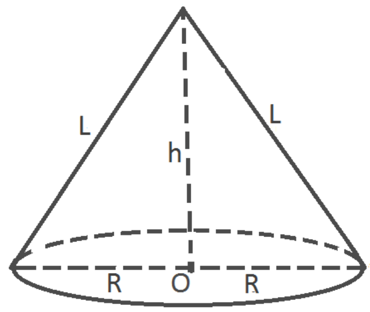

Решение**:** Поскольку AC = 8 см, а $\angle ACD = 30°$, то
$CD = AC \cos 30°$
$CD = 8 \cdot \sqrt{3}/2 = 4\sqrt{3}$
Аналогично,
$AD = AC \sin 30°$
$AD = 8 \cdot 1/2 = 4$
Откуда радиус основания цилиндра равен
$R = AD/2 = 4/2 = 2$ см
Площадь основания цилиндра, соответственно, равна
$S_о = \pi R^2 = 4\pi$ см$^2$.
Площадь боковой поверхности цилиндра: $S_б = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 4\sqrt{3} = 16\pi\sqrt{3}$ см$^2$.
Площадь полной поверхности цилиндра равна:
$S_{пп} = 2S_о + S_б = 2\cdot 4\pi + 16\pi\sqrt{3} = 8\pi + 16\pi\sqrt{3}$ см$^2$.

Ответ $8\pi + 16\pi\sqrt{3}$.

## Конус.

**Пример 5.** Высота конуса равна 5см, а радиус основания 12см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Решение: Для нахождения площади полной поверхности конуса воспользуемся следующими формулами: $S_б = \pi RL$, $S_о = \pi R^2$, $S_{пп} = S_б + S_о$ .




Поскольку высота конуса h, радиус основания конуса R и образующая L являются сторонами прямоугольного треугольника, то

$L^2 = h^2 + R^2$

$S_б = \pi R\sqrt{h^2 + R^2}$

$S_{пп} = S_б + S_о = \pi R\sqrt{h^2 + R^2} + \pi R^2$;

$S_{пп} = \pi\cdot 12\sqrt{5^2 + 12^2} + \pi 12^2 = 12\pi\sqrt{169} + 144\pi = 156\pi + 144\pi = 300\pi$ см$^2$.

Ответ $300\pi$ .

**Пример 6 .** Площадь основания конуса $36\pi$ см$^2$ , а его образующая 10 см. Вычислить боковую поверхность конуса.

Решение: Зная площадь основания, найдем его радиус.

$S = \pi R^2$ ; $36\pi = \pi R^2$ ; $R^2 = 36$ ; $R = 6$ см.

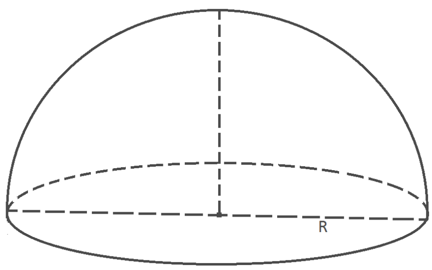
Площадь боковой поверхности конуса найдем по формуле: $S_б = \pi RL$

$S_б = \pi\cdot 6\cdot 10 = 60\pi$ см$^2$.

Ответ $60\pi$ см$^2$ .

## Шар

**Пример 7.** Емкость имеет форму полусферы (полушара). Длина окружности основания равна 46 см. На 1 квадратный метр расходуется 300 граммов краски. Сколько необходимо краски, чтобы покрасить емкость?




Решение: Площадь поверхности фигуры будет равна половине площади сферы и площади сечения сферы. Поскольку нам известна длина окружности основания, найдем ее радиус: $L = 2\pi R \Rightarrow R = L / 2\pi$; $R = 46 / 2\pi$; $R = 23/\pi$

Тогда площадь основания равна $S_о = \pi R^2$ или $S_о = \pi (23/\pi)^2$ ; $S_о = 529 / \pi$

Площадь сферы найдем по формуле: $S_{сф} = 4\pi R^2$

А площадь полусферы $S_{п/сф} = 4\pi R^2 / 2$ или $S_{п/сф} = 2\pi (23/\pi)^2$ ; $S_{п/сф} = 1058 / \pi$

Общая площадь поверхности фигуры равна:

$S_{пп} = S_о + S_{п/сф} = 529 / \pi + 1058 / \pi = 1587/\pi$ см$^2$.

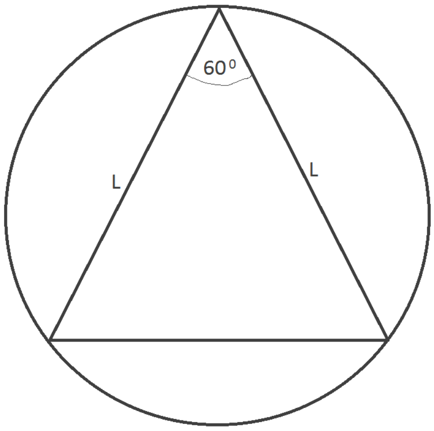
Теперь вычислим расход краски (учтем, что расход дан на квадратный метр, а вычисленное значение в квадратных сантиметрах, то есть 1 м$^2$ = 10 000 см$^2$).

$1587 / \pi \cdot 300 / 10\,000 = 47{,}61 / \pi \approx 15{,}15$ г

Ответ 15,15.

## Комбинации тел вращения

**Пример 8.** В сферу вписан конус, образующая которого равна L, а угол при вершине осевого сечения равен 60 градусов. Найдите площадь сферы.

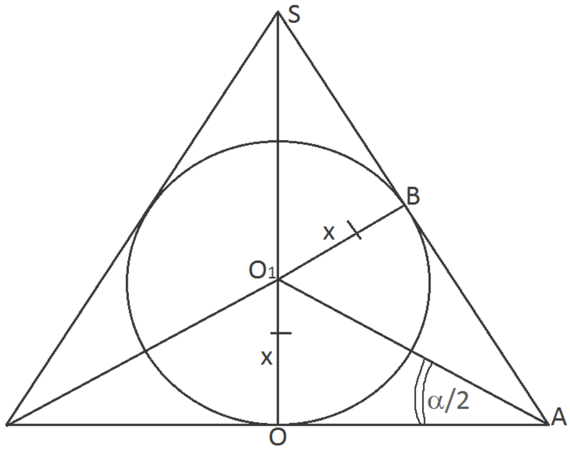



Решение:
Площадь сферы найдем по формуле: $S = 4\pi r^2$ .

Поскольку в сферу вписан конус, проведем сечение через вершину конуса, которое будет равнобедренным треугольником. Поскольку угол при вершине осевого сечения равен 60º, то треугольник - равносторонний (сумма углов треугольника - 180º, значит остальные углы ( 180-60 )/ 2 = 60º, то есть все углы равны ). Заметим, что радиус сферы равен радиусу окружности, описанного вокруг равностороннего треугольника. Сторона треугольника по условию равна L, тогда по формуле $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$ получим $R = L/(2\sin 60) = \sqrt{3}L/3$.
Таким образом площадь сферы $S = 4\pi(\sqrt{3}L/3)^2$
$S = 4\pi L^2/3$

Ответ $4\pi L^2/3$.

**Пример 9.** Отношение поверхности шара, вписанного в конус, к площади основания конуса равно k. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.




Дано $S_ш/S_{о\ кон} = k$. Найти $\cos\angle SAO = \cos\alpha$.

Решение: Изобразим осевое сечение конуса.
Обозначим $OO_1 = x$, $\angle O_1AO = \alpha/2$.

$\Delta O_1AO$: $tg(\alpha/2) = x/OA \Rightarrow OA = x \cdot ctg(\alpha/2)$.

$S_ш/S_{о\ кон} = (4\pi x^2)/[\pi (x\, ctg(\alpha/2))^2] = k$;

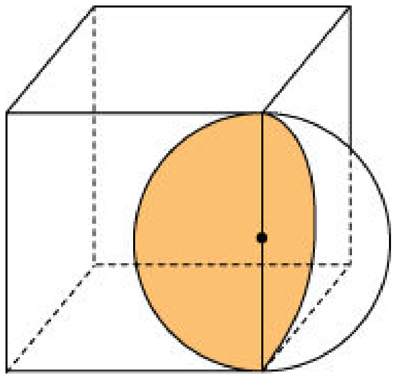
$(4\pi x^2)/[\pi x^2 ctg^2(\alpha/2)] = k$; $4/ctg^2(\alpha/2) = k$;

$4tg^2(\alpha/2) = k$; $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{k}{4}$, $\cos\alpha = (4-k)/(4+k)$.

Отсюда следует (т.к. $\alpha$ – острый угол), что $0 < k < 4$.

Ответ $(4-k)/(4+k)$, $0 < k < 4$.

**Пример 10.** Середина ребра куба со стороной 1,9 является центром шара радиуса 0,95. Найдите площадь части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответе запишите S/π



**Решение:**

Обратите внимание, что $0{,}95 \cdot 2 = 1{,}9$. Значит, сторона куба является диаметром шара. Осталось понять, какая часть шара лежит внутри куба. Четвертая часть шара лежит внутри куба.

$(4 \cdot 0{,}95^2 \cdot \pi/4) = 0{,}9025\pi$.

Для этого в формулу площади поверхности шара добавляем делитель 4, что в итоге получается $0{,}9025\pi/\pi = 0{,}9025$.

**Ответ** 0,9025.