Тема № 67 «Объемы многогранников»

Объем – величина, сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа. За единицу объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения длины.

Для объемов пространственных фигур справедливы свойства:

1. Объем фигуры в пространстве является неотрицательным числом.

2. Равные фигуры имеют равные объемы.

3. Если фигура Ф составлена из двух неперекрывающихся фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, то объем фигуры Ф равен сумме объемов фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, т.е.

$V(Ф)=V(Ф_1)+V(Ф_2)$.

Две фигуры, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*.

Основные формулы

- *Произвольная призма* ($P_{сеч}$, $S_{сеч}$ – периметр и площадь перпендикулярного сечения, l – боковое ребро, H - высота):
  $S_б = P_{сеч} \cdot l$, $V = S_{осн} \cdot H$, $V = S_{сеч} \cdot l$
- *Прямая призма:*
  $S_{пп} = S_{бок} + 2S_{осн}$, $S_{бок} = P \cdot H$, $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$, $V = S_{осн} \cdot H$

- *Прямоугольный параллелепипед (a, b, c –* его измерения, d – диагональ):
  $S_б = P_{сеч} \cdot H$, $S_{полн} = 2(ab + ac + bc)$
  $V = S_{осн} \cdot H$, $V = abc$, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
- *Куб:* $V = a^3$, $S_{полн} = 6a^2$.

- *Произвольная пирамида* (S_i - площади боковых граней**,** S - площадь основания и h — высота; P – периметр основания, l – боковое ребро)
  $V = \frac{1}{3}Sh$, $S_b = \sum_i S_i$ $S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot l$ $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$
- *Правильная пирамида* (P – периметр основания, H – высота, $h_{бок}$ - апофема)
  $S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot h_{бок}$ $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha}$,
  где α – двугранный угол при основании
  $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$ $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$

- *Произвольная усечённая пирамида*

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$$

$$где\ H - высота, S_1\ и\ S_2 - площади\ оснований,$$

$$V - объем.$$

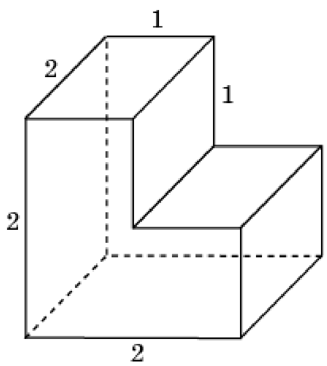
- *Правильная усечённая пирамида*

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\, h$$

$$S_{полн} = S_{бок} + S_1 + S_2,$$

$$где\ h - апофема, P_1\ и\ P_2 - периметры\ оснований$$

Параллелепипед и куб

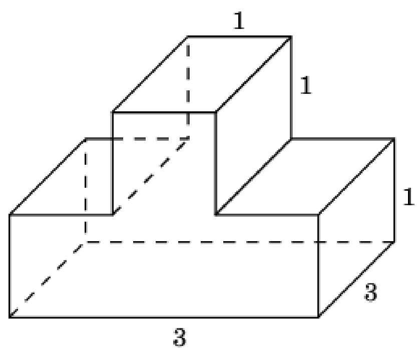


Пример 1. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.

Решение 1: Многогранник состоит из двух прямоугольных параллелепипедов, объемы которых равны 2·1·1 = 2 и 2·2·1 = 4. Следовательно, объем многогранника равен 2 + 4 = 6.

Решение 2: Многогранник получается из куба, объем которого равен $2^3 = 8$, вырезанием прямоугольного параллелепипеда, объем которого равен 2·1·1 = 2. Следовательно, объем многогранника равен 8 – 2 = 6.

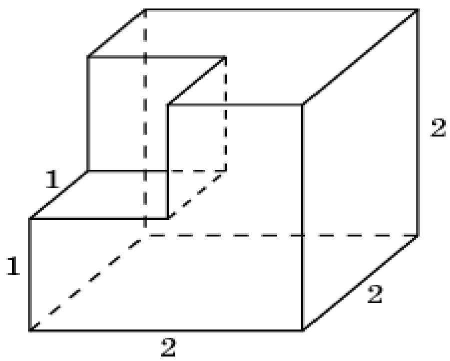
Ответ 6.



Пример 2. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.

Решение. Многогранник составлен из двух прямоугольных параллелепипедов, объемы которых равны 3·3·1 = 9 и 3·1·1 = 3. Следовательно, объем многогранника равен 9 + 3 =12.

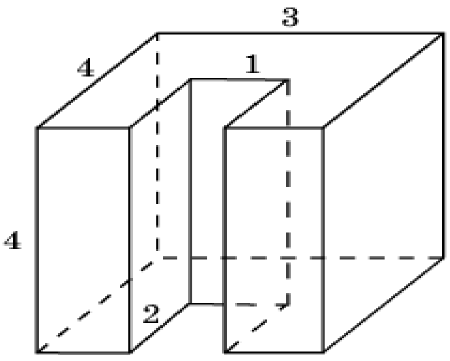
Ответ 12.



Пример 3. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.

Решение. Многогранник получается из куба, объем которого равен 8, вырезанием куба, объем которого равен 1. Следовательно, объем многогранника равен 7.

Ответ 7.



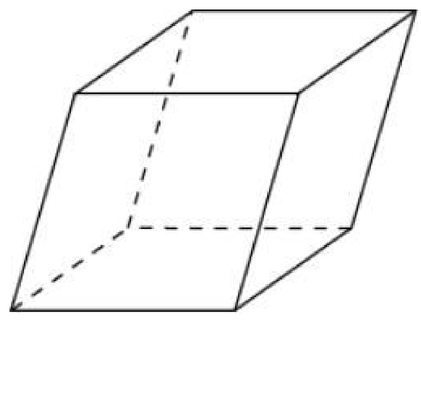
Пример 4. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.

Решение. Многогранник получается из прямоугольного параллелепипеда, объем которого равен $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$, вырезанием прямоугольного параллелепипеда, объем которого равен $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$. Следовательно, объем многогранника равен $48 - 8 = 40$.

Ответ 40.

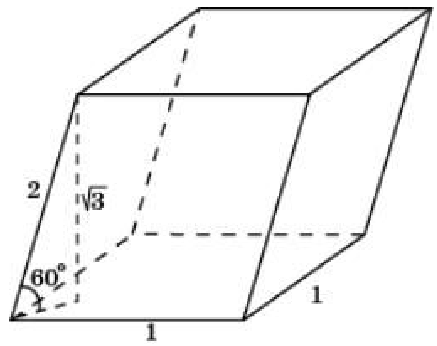
Пример 5. Площадь полной поверхности куба равна 24 см^2 . Найдите его объем.
Решение: Поскольку куб имеет шесть одинаковых граней, найдем площадь одной из них: 24 / 6 = 4 см^2
Зная площадь грани куба, найдем величину ребра $a = \sqrt{4} = 2$ см
Тогда его объем равен $V = a^3 = 2^3 = 8$ см^3 .
Ответ 8.

Пример 6. В прямоугольном параллелепипеде ребра изменены следующим образом: длина и ширина увеличены в 2 раза, высота уменьшена в 6 раз. Как изменится площадь его боковой поверхности и объем при заданном изменении.
Решение: Пусть измерения параллелепипеда a, b, c. Тогда его площадь боковой поверхности $S_б = P_{осн} \cdot h = 2c(a + b)$. Проследим, как изменится площадь боковой поверхности при заданном в задаче преобразовании: $2\frac{c}{6}(2a+2b)=\frac{2c}{3}(a+b)=\frac{S_б}{3}$. Таким образом, площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда уменьшилась в три раза.
До преобразования объем был равен $V = abc$. После преобразования получаем $2a2b\frac{c}{6}=\frac{2}{3}V$. Следовательно, объем новой фигуры составляет $\frac{2}{3}$ от объема начальной фигуры.
Ответ площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда уменьшилась в 3 раза; объем прямоугольного параллелепипеда уменьшился в $\frac{2}{3}$ раза.



Пример 7. Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в 60° и равно 2. Найдите объем параллелепипеда.

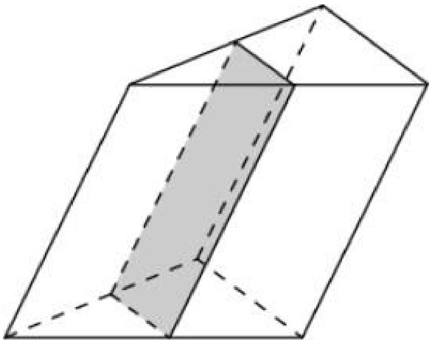
Решение:



Площадь грани параллелепипеда, являющейся ромбом со стороной 1 и острым углом 60°, равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Высота, опущенная на эту грань, равна $2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$. Объем параллелепипеда равен 1,5.

Ответ. 1,5.

Призма



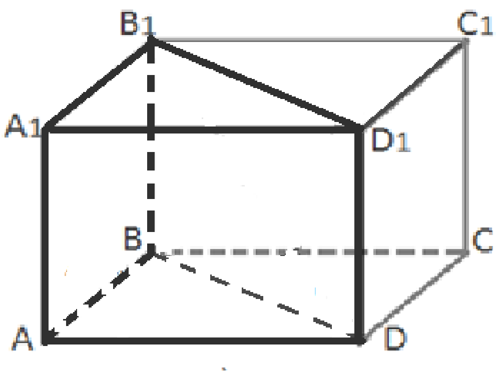
Пример 8. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.

Решение:

Площадь основания отсеченной призмы равна четверти площади основания исходной призмы. Высота отсеченной призмы равна высоте исходной призмы. Следовательно, объем отсеченной призмы равен четверти объема исходной призмы, т.е. равен 8.

Ответ 8.

Пример 9. Пусть Q – площадь одной из боковых граней треугольной призмы, d – расстояние от противоположного ребра до этой грани. Тогда объем этой призмы можно найти по формуле: V = ½Qd.



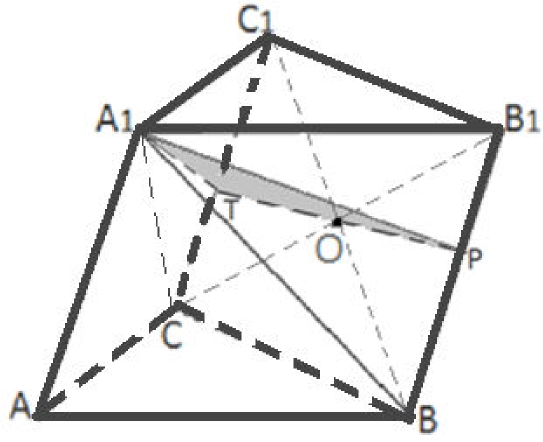
Доказательство: Пусть площадь грани AA_1D_1D равна Q, а расстояние от BB_1 до этой грани равно d. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $V_{п\text{-}да} = Qd$. Так как

объем параллелепипеда в 2 раза больше объема призмы $ABDA_1B_1D_1$, то объем этой призмы: V = ½Qd.

Пример 10. Все ребра призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны между собой. Углы BAA_1 и CAA_1 равны по 60º. Найти объем призмы, если площадь грани ABB_1A_1 равна $8\sqrt{3}$.

Решение: Так как все ребра равны, то все боковые грани призмы – ромбы, а основания – правильные треугольники. Боковые грани ABB_1A_1 и ACC_1 A_1 – ромбы с углом 60º, поэтому обозначим $BA_1 = CA_1 = CB_1 = x$.

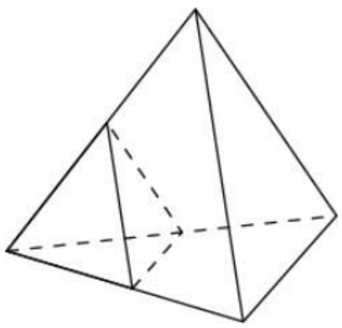
Площадь грани ABB_1A_1 равна $S = x^2 \sin 60 = x^2\sqrt{3}/2$. Из условия получаем уравнение: $x^2\sqrt{3}/2 = 8\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$.



Объем призмы найдем по формуле:
$V_п = S_\perp \cdot L$, где $S_\perp$- площадь перпендикулярного сечения, L – длина бокового ребра.
Построим перпендикулярное сечение A_1PT, где P и T – середины ребер BB_1 и CC_1 соответственно. Так как треугольники A_1BB_1 и A_1CC_1 правильные, то их медианы являются высотами, поэтому $A_1P \perp BB_1$, $A_1T \perp CC_1$. Отсюда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости все боковые ребра призмы перпендикулярны плоскости A_1PT, т.е. A_1PT – перпендикулярное сечение данной призмы. В ΔA_1PT: $A_1O \perp PT$, $PT = x = 4$, $A_1P = x\sqrt{3}/2$, $A_1O = \sqrt{(A_1P^2 - PO^2)} = x\sqrt{2}/2$.

Следовательно, площадь перпендикулярного сечения $S_{A1PT} = ½PT \cdot A_1O = x^2\sqrt{2}/4$.
Тогда объем призмы $V = S_{A1PT} \cdot AA_1 = x^3\sqrt{2}/4 = 4^3\sqrt{2}/4 = 16\sqrt{2}$.
Ответ $16\sqrt{2}$.

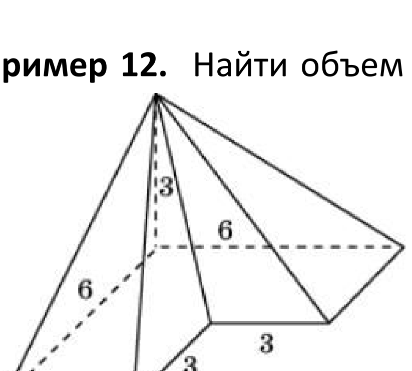
Пирамида



Пример 11. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?
Решение: Воспользуемся тем, что если два тетраэдра подобны и коэффициент подобия равен *k*, то отношение объемов этих тетраэдров равно k^3. Если ребра тетраэдра увеличить в два раза, то объем тетраэдра увеличится в 8 раз.

Ответ 8.

Пример 12. Найти объем пирамиды, изображенной на рисунке. Ее основанием является многоугольник, соседние стороны которого перпендикулярны, а одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 3.

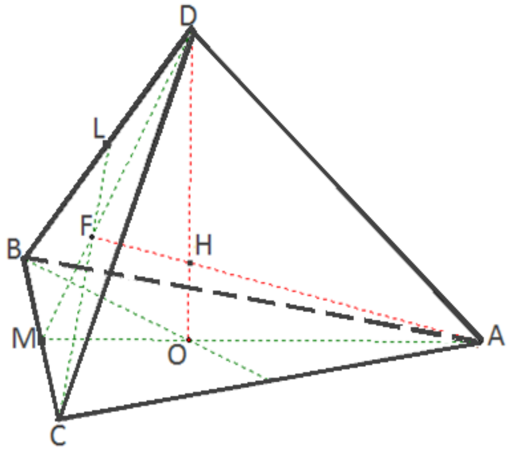


Решение: Площадь основания пирамиды равна 36 – 9 = 27, высота равна 3. Следовательно, объем пирамиды равен $V = 27 \cdot 3/3 = 27$.

Ответ 27.

Пример 13. Найти объем правильного тетраэдра, все ребра которого равны b.

Решение: DO = h – высота тетраэдра.

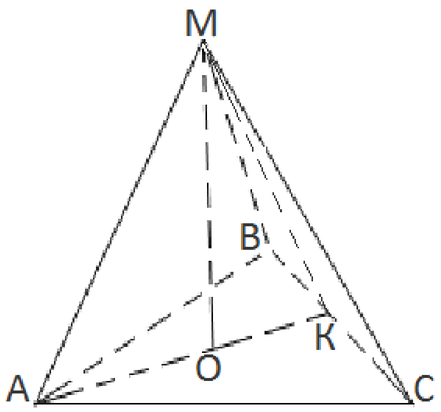


DH : HO = 3: 1, DH = ¾ DO, HO = ¼ DO.

Δ DOM: DM = $b\sqrt{3}/2$, OM = 1/3AM = $b\sqrt{3}/6$.
$h = \sqrt{(DM^2 - OM^2)} = \sqrt{[(b\sqrt{3}/2)^2 - (b\sqrt{3}/6)^2]} = b\sqrt{(2/3)}$
$S_{осн} = b^2\sqrt{3}/4$
$V = 1/3\ S_{осн} \cdot h = b^2\sqrt{3}/4 \cdot b\sqrt{(2/3)}/3 = b^3\sqrt{2}/12$.

Ответ $b^3\sqrt{2}/12$.

Пример 14. В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60 градусов. Расстояние от центра основания до боковой грани равно 2√3. Найти объём пирамиды.



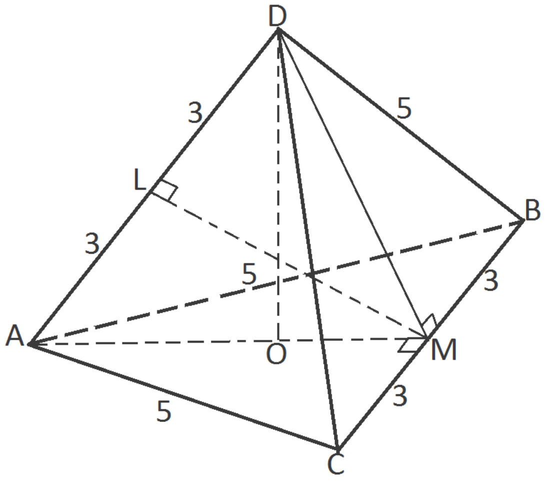
Решение: Основанием правильной треугольной пирамиды по определению является равносторонний треугольник. А расстояние от центра основания до боковой грани равно радиусу вписанной окружности. Площадь равностороннего треугольника равна:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 = 3\sqrt{3}r^2$$

$S = 3\sqrt{3}\ r^2 = 3\sqrt{3}\ (2\sqrt{3})^2 = 36\sqrt{3}$
Поскольку грани наклонены к основанию под углом 60 градусов, то для прямоугольного треугольника MOK:

tg MKO = MO/KO; tg 60 = MO / (2√3) ; √3 = MO / (2√3); MO = 6 см – высота пирамиды. Объем пирамиды найдем по формуле: S = 1/3 S·h
S = 1/3·36√3·6 ; S = 72√3

Ответ 72√3.



Пример 15. Найти объем пирамиды, все грани которой равнобедренные треугольники с боковой стороной, равной 5, и основанием – 6.
Решение: Пусть в пирамиде основанием является ΔABC, в котором AB=AC=5, BC = 6. По теореме косинусов $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 50 - 36 > 0$, поэтому ΔABC – остроугольный. Если AD = 5, то DC = 6, что противоречит условию, поскольку грань BCD не

будет равнобедренным треугольником со сторонами 5, 5, 6. Следовательно, AD = 6, тогда DC = DB = 5. Сделаем рисунок.

Пусть M и L - середины ребер BC и AD соответственно. Тогда AM и DM – медианы в равных равнобедренных треугольниках с общим основанием BC, проведенные к этому основанию. Следовательно, $DM \perp BC$, $AM \perp BC$ и AM = DM.

По теореме Пифагора из ΔAMC: $AM = \sqrt{(5^2 - 3^2)} = 4$. Значит, AM = DM =4. Отсюда следует, что ΔADM – равнобедренный и его медиана ML – общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым BC и AD и , следовательно, его длина – расстояние между прямыми BC и AD.

Кроме того по признаку перпендикулярности плоскостей, $ABC \perp ADM$, и , следовательно, высота DO ΔADM будет являться высотой пирамиды.

Из прямоугольного ΔAML: $ML = \sqrt{(AM^2 - AL^2)} = \sqrt{(4^2 - 3^2)} = \sqrt{7}$.

Высоты треугольника обратно пропорциональны сторонам, к которым они проведены. Следовательно, $ML\cdot AD = DO\cdot AM$, $\sqrt{7}\cdot 6 = DO\cdot 4$, $DO = 3\sqrt{7}/2$.

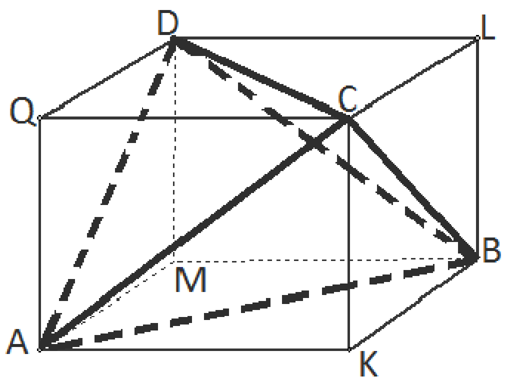
Площадь основания S_{ABC} равна удвоенной площади ΔAMC и равна

$S_{ABC} = 2S_{AMC} = 2\cdot ½\ AM\cdot MC = 4\cdot 3 = 12$.

$V = 1/3\ S_{ABC}\cdot DO = 12\cdot 3\sqrt{7}/(2\cdot 3) = 6\sqrt{7}$.

Ответ $6\sqrt{7}$.

Пример 16. Пусть *a* и b – длины двух противоположных ребер тетраэдра, d – расстояние между ними, α - угол между ними. Тогда объем тетраэдра можно вычислить по формуле: $V = 1/6\ abd\cdot\sin\alpha$.



Доказательство: Достроим данный тетраэдр ABCD до параллелепипеда AKBMQCLD, проводя через каждое ребро плоскость, параллельную противоположному ребру. Пусть AB = *a,* CD = b, тогда площади граней AKBM и LCQD равны

$S = ½\ ab\cdot\sin\alpha$. Расстояние между ними d. Тогда объем параллелепипеда равен:

$V_{п\text{-}да} = ½\ abd\cdot\sin\alpha$. Объем пирамиды составляет 1/3 от объема параллелепипеда, т.е.

$V = 1/6\ abd\cdot\sin\alpha$.