Тема № 68 «Объемы тел вращения»

Основные формулы

Цилиндр (R – радиус основания, H – высота):

$V = \pi R^2 H$; $S_б = 2\pi RH$; $S_{пп} = 2\pi R(R + H)$.

Конус (R – радиус основания, L – образующая, h – высота конуса):

$S_б = \pi RL$; $S_{пп} = \pi R^2 + \pi RL = \pi R(R + L)$; $V = \pi R^2 h/3$.

Усеченный конус (R_1 и R_2 – радиусы оснований; L – образующая, h – высота конуса):

$S_{б\ ус} = \pi L(R_1 + R_2)$; $S_{пп\ ус} = \pi(R_1 L + R_2 L + R_1^2 + R_2^2)$; $V_{ус} = \pi h(R_1^2 + R_2^2)/3$.

Шар (R – радиус): $S_б = 4\pi R^2$; $V = 4\pi R^3/3$.

Шаровой сегмент (R – радиус шара, h – высота сегмента, r – радиус основания сегмента):

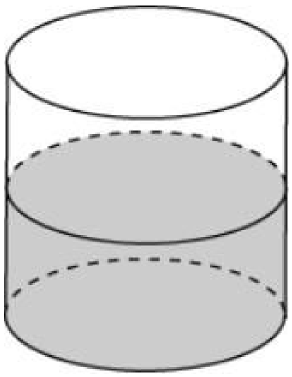
$V_{сегм} = \pi h^2(R – h/3)$ или $V_{сегм} = \pi h(h^2 + 3r^2)/6$; $S_{сегм} = 2\pi Rh$;

Шаровой сектор (R – радиус шара, h – высота сегмента): $V = V_{сегм} \pm V_{кон}$,

«+» – если сегмент меньше, «–» – если сегмент больше полусферы.

Шаровой слой (R_1 и R_2 – радиусы оснований шарового слоя; h – высота шарового слоя или расстояние между основаниями): $V = \pi h^3/6 + \pi h(R_1^2 + R_2^2)/2$; $S = 2\pi Rh$.

Цилиндр



Пример 1. В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 литров воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объем детали?

Решение: Так как уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза, то и объем увеличился в 1,5 раза, т.е. стал равен 9. Следовательно, объем детали равен 9 – 6 = 3.

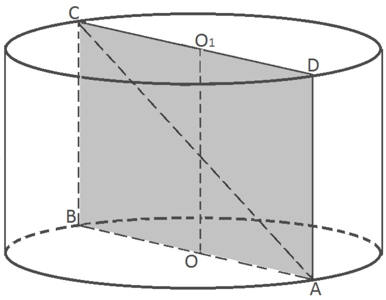
Ответ 3.

Пример 2. Плоскости, параллельные основанию цилиндра, разбили его на три цилиндра, объемы которых относятся как 1:2:3. Определить, в каком отношении эти плоскости разделили площадь боковой поверхности этого цилиндра.

Решение: $V = \pi R^2 H$ – объем цилиндра, $S_б = 2\pi RH$ – площадь боковой поверхности цилиндра. Заметим, что и объем и площадь линейно зависят от высоты цилиндра H. Следовательно, объемы цилиндров, имеющих одинаковые радиусы, относятся, как 1:2:3. Поэтому   и площади боковых поверхностей этих цилиндров относятся как 1:2:3.

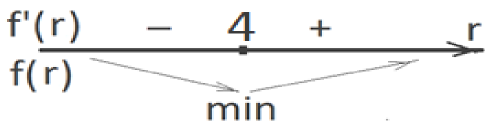
Ответ 1:2:3.

Пример 3. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см и образует с плоскостью нижнего основания угол 45º. Найти объём цилиндра.



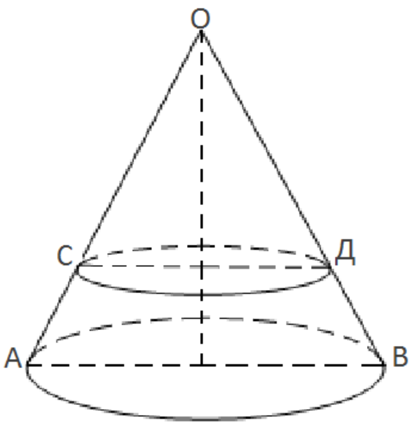
Решение: Так как угол между диагональю и высотой тоже равен 45º(180 – 90 – 45), то ΔABC равнобедренный и высота цилиндра равна его диаметру.
По теореме Пифагора: $d^2 + d^2 = 12^2$; $2d^2 = 144$; $d^2 = 72$; $d = 6\sqrt{2} = H$, $r = 3\sqrt{2}$.
Тогда объем цилиндра $V = \pi R^2 H$; $V = \pi(3\sqrt{2})^2 6\sqrt{2} = 108\sqrt{2}\pi$.
Ответ $108\sqrt{2}\pi$.

Пример 4. Осевое сечение цилиндра - квадрат, диагональ которого равна $4\sqrt{2}$. Вычислить объем цилиндра.
Решение: Пусть сторона квадрата *a*. По теореме Пифагора: $a^2 + a^2 = (4\sqrt{2})^2$; $2a^2 = 32$; $a^2 = 16$; $a = 4$.
Тогда R = 2, H = 4. Объем цилиндра: $V = \pi R^2 H$; $V = \pi 2^2 4 = 16\pi$.
Ответ 16π.
Пример 5. Какой из цилиндров с объемом 128π см^3 имеет наименьшую полную поверхность?
Решение**:** Формула нахождения объема цилиндра $V = \pi r^2 h$
Подставим значение объема цилиндра в формулу: $\pi r^2 h = 128\pi$; $r^2 h = 128$; $h=128/r^2$
Подставим значение высоты цилиндра в полученную формулу площади полной поверхности цилиндра:
$S_{пп} =2\pi r^2 + 2\pi rh$
$S_{пп} = 2\pi r^2 + 2\pi r\cdot 128/r^2$
$S_{пп} = 2\pi r^2 + 256\pi/r$
Представим полученную формулу как функцию площади поверхности цилиндра от радиуса S(r) = f(r) . Минимальная площадь цилиндра будет достигнута в точке экстремума данной функции. Для нахождения экстремума дифференцируем полученную функцию: $f(r) = 2\pi r^2 + 256\pi /r$.
$f'(r) = 4\pi r – 256\pi / r^2$
В точке экстремума производная функции равна нулю: $f'(r)= 0$.
$4\pi r – 256\pi/r^2 = 0$;
$4\pi(r^3 – 64)/r^2 = 0$;
$4\pi(r – 4)(r^2+ 4r + 16)/r^2 = 0$;
$f' = 4\pi(r – 4)(r^2+ 4r + 16)/r^2$
$f' = 0$ при $r = 4$.



Тогда $h = 128/r^2$;
$h = 128/16 = 8$.
Ответ: минимальная площадь цилиндра будет достигнута при h = 8 см, r = 4 см.

Конус



Пример 6. Объем конуса равен 27. На высоте конуса лежит точка и делит её в отношении 2:1 считая от вершины. Через точку проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

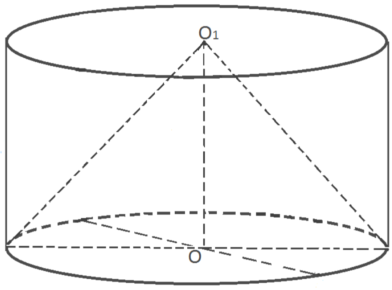
Решение: Треугольники АОВ и COD подобны. Из условия задачи определим коэффициент подобия как $k = 2/3$.

Объем конуса: $V_к = \pi R^2h/3 = 27$ (по условию), $\pi R^2h = 81$.

Объем малого конуса: $V_{мк} = \pi(2/3R)^2(2/3h)/3$

$V_{мк} = \pi R^2h\cdot 4/9\cdot 2/9$; $V_{мк} = \pi R^2h\cdot 8/81 = 81\cdot 8/81 = 8$.

Ответ 8.



Пример 7. Объем цилиндра равен 48 см^3. Найти объем конуса, радиус основания которого равен радиусу основания цилиндра, а высота вдвое меньше высоты цилиндра.

Решение:

Учитывая $h = H/2$, объем конуса: $V_к = \pi R^2h/3 = \pi R^2H/6$.

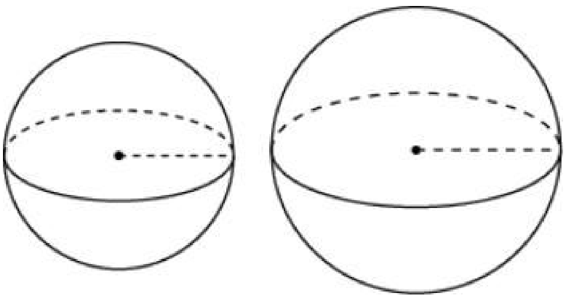
Подставим в формулу объема конуса значение объема цилиндра: $V_ц = \pi R^2H = 48$.

Получим: $V_к = 48/6 = 8$ см^3.

Ответ 8.

Шар

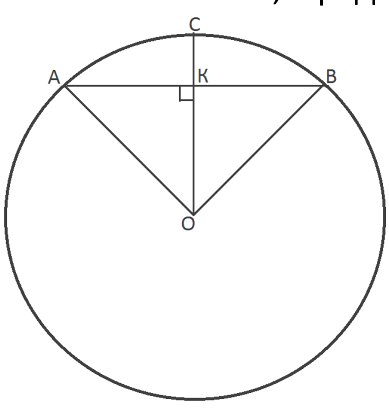
Пример 8. Радиусы двух шаров равны 6 и 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.



Площади поверхностей данных шаров равны $4\pi\cdot 36$ и $4\pi\cdot 64$. Их сумма равна $4\pi\cdot 100$. Следовательно, радиус шара, площадь поверхности которого равна этой сумме, равен 10.

Ответ 10.

Пример 9. Найти объем шарового сектора, если радиус окружности его основания $r = 60$ см, а радиус шара $R = 75$ см.



Решение:

$V = V_{сегм} + V_{кон} = \pi h^2(R - h/3) + \pi r^2(R - h)/3$.

Рассмотрим осевое сечение шара. В прямоугольном ΔОВК: ОВ = ОС = 75 см, КВ = 60 см. По теореме Пифагора: $ОК = \sqrt{(ОВ^2 - ВК^2)} = \sqrt{(75^2 - 60^2)} = 45$ см.

Высота шарового сегмента

СК = СО – ОК = 75 – 45 = 30 см.

Объем шарового сектора:

$V = \pi 30^2(75 – 30/3) + \pi 60^2(75 – 30)/3$; $V = 58500\pi + 54000\pi = 112500\pi$ см^3.
Ответ 112500π см^3.

Пример 10. Чугунный шар регулятора имеет массу 10 кг. Найти диаметр шара (плотность чугуна 7,2 г/см^3).

Решение: Плотность $\rho = 7{,}2$ г/см^3 = 7200 кг/м^3. Объем шара:
$V = m/\rho = 10/7200 = 1/720$ (м^3). С другой стороны объем шара $V = 4\pi R^3/3$ или
$V = 4\pi d^3/6$. Тогда $d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi 720}} = \sqrt[3]{\frac{1}{120\pi}} \approx 0{,}14$ (м)

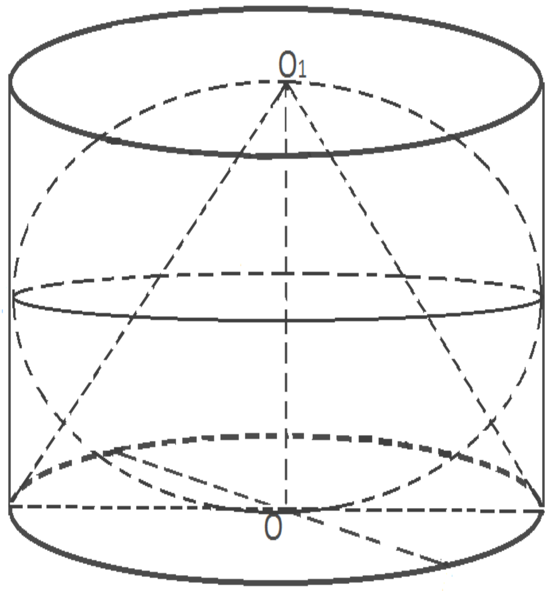
Ответ 0,14.

Пример 11. Площади поверхностей двух шаров относятся как m:n. Как относятся их объемы?

Решение: Площадь поверхности шара и объем находят по формулам:
$S_б = 4\pi R^2$; $V = 4\pi R^3/3$.
Тогда, если $S_1 : S_2 = 4\pi R_1^2 : 4\pi R_2^2 = m:n$, то $R_1 : R_2 = \sqrt{(m:n)}$.
$V_1 : V_2 = 4\pi R_1^3/3 : 4\pi R_2^3/3 = (R_1/R_2)^3 = (\sqrt{(m:n)})^3 = (m:n)^{3/2}$.
Ответ $(m:n)^{3/2}$.

Комбинации тел

Пример 12. В цилиндр вписаны шар и конус, причём высота цилиндра равна диаметру его основания. Найти отношение объёма конуса а) к объёму шара, б) к объёму цилиндра.



Решение: Найти а) $V_{кон} : V_ш$ -? б) $V_{кон} : V_ц$ -?
Формулы объема конуса, шара и цилиндра: $V_{кон} = \pi R^2 h/3$; $V_ш = 4\pi R^3/3$; $V_ц = \pi R^2 H$.
Высоты цилиндра и конуса равны диаметру шара: $h = 2R$.
$V_{кон} = \pi R^2 h/3 = \pi R^2 2R/3 = 2\pi R^3/3$
$V_ц = \pi R^2 h = \pi R^2 2R = 2\pi R^3$
Тогда $V_{кон} : V_ш = 2\pi R^3/3 : 4\pi R^3/3 = 2/4 = ½$
$V_{кон} : V_ц = 2\pi R^3/3 : 2\pi R^3 = 1/3$.

Ответ а) ½, б) 1/3.