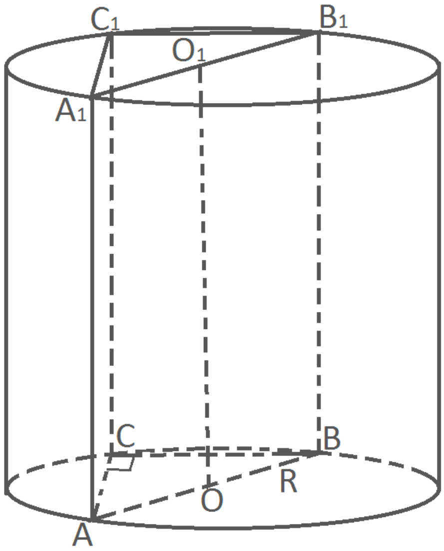
Тема № 69 «Комбинированные задачи»



Пример 1. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 7 и 8. Боковые ребра равны $8/\pi$. Найти объем цилиндра, описанного около этой призмы.

Решение: По свойству вписанных в окружность углов гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанной около него окружности. Т.е. AB = 2R.

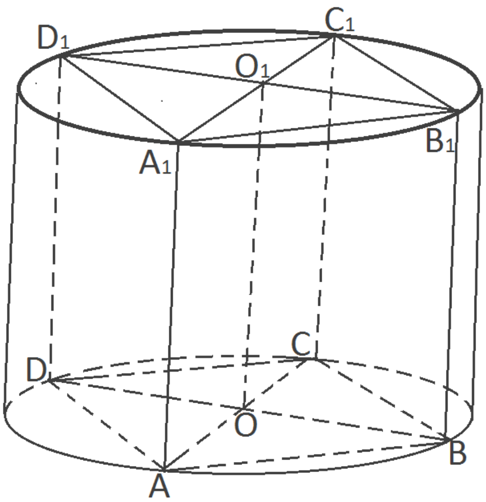
По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 7^2 + 8^2 = 113$

$2R = \sqrt{113}$; $R = \sqrt{113}/2$.

Таким образом, объем цилиндра:

$V = \pi R^2 h = \pi(\sqrt{113}/2)^2 \cdot 8/\pi = 226$.

Ответ 226.



Пример 2. Куб с ребром *a* вписан в цилиндр. Найти площадь осевого сечения цилиндра.

Решение:

Диагональ квадрата ABCD является диаметром основания цилиндра. По теореме Пифагора:

$CD^2 + AD^2 = AC^2$; $a^2 + a^2 = AC^2$; $2a^2 = AC$; $AC = a\sqrt{2}$

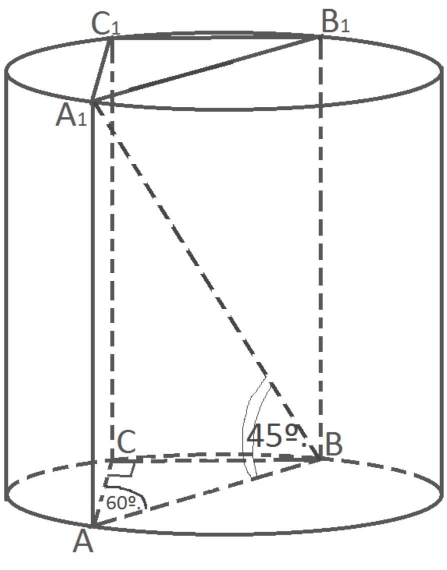
Высота осевого сечения цилиндра AA_1C_1C равна длине ребра куба *a*.

Таким образом, площадь сечения равна:

$S = AC \cdot AA_1 = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

Ответ $a^2\sqrt{2}$.

Пример 3. В цилиндр вписана призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник, катет которого равен $2a$, а прилежащий угол равен 60º. Диагональ большей боковой грани призмы составляет с плоскостью ее основания угол в 45º. Найти объем цилиндра.



Решение:

Объем цилиндра найдем по формуле: $V = \pi R^2 h$.

Большая боковая грань призмы – это осевое сечение цилиндра.

Основание цилиндра одновременно является окружностью, описанной вокруг прямоугольного треугольника, являющегося основанием призмы, при этом AB = 2R – гипотенуза.

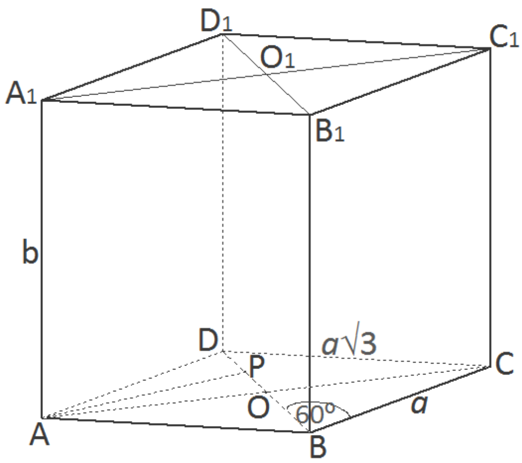
В прямоугольном ΔABC:

$\cos 60 = AC/AB$; $0{,}5 = 2a/2R = a/R$, $R = 2a$, $AB = 2R = 4a$.

ΔAA_1B - прямоугольный и равнобедренный, т.к. углы $\angle AA_1B = \angle A_1BA = 45^\circ$. Высота цилиндра равна

диаметру основания, т.к. осевое сечение цилиндра – квадрат, т.е. $AB = AA_1 = 4a$.
Итак, $V = \pi(2a)^2\cdot(4a) = 16a^3\pi$.
Ответ $16a^3\pi$.

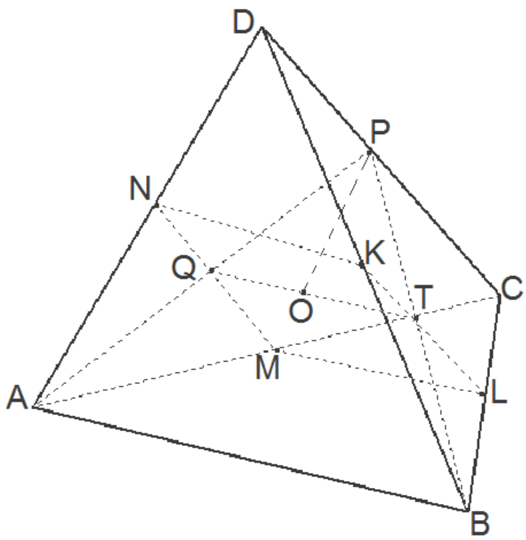
Пример 4. Около прямой четырехугольной призмы описан цилиндр. Основание призмы – прямоугольник, диагональ и меньшая сторона которого образуют угол 60°. Площадь боковой поверхности призмы равна $120\sqrt{3}$, а расстояние между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания равно $1 + \sqrt{3}$. Найти объем цилиндра.



Решение:
1) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма, основания которой прямоугольники, диагонали которых пересекаются в точках O и O_1 соответственно. Поскольку диагонали прямоугольника равны между собой и делятся точками пересечения пополам, O и O_1 – центры оснований цилиндра, описанного около данной призмы, OA – радиус этого цилиндра, AA_1 – высота цилиндра, поскольку вписанная в него призма – прямая.
2) Пусть AP – высота ΔABD, $AP\perp BD$. $AA_1 \perp ABC$, поэтому $AA_1 \perp AP$. Таким образом, AP – общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым BD и AA_1, которые содержат боковое ребро призмы AA_1 и диагональ ее основания BD. Значит, длина отрезка AP равна расстоянию между этими скрещивающимися прямыми. По условию $AP = 1 + \sqrt{3}$.
3) Пусть AB >BC, тогда по условию $\angle CBD = 60^\circ$ и, значит, $\angle ADB = \angle ACB = \angle CAD = 60^\circ$. ΔADO равнобедренный и $\angle ADO = 60^\circ$. Значит, ΔADO равносторонний, и AP – его высота, так как $AP\perp OD$.
4) Пусть $AD = a$, $AA_1 = b$. Тогда $AP = a\sqrt{3}/2$, и из равенства $a\sqrt{3}/2 = 1 + \sqrt{3}$ найдем: $a = 2(1 + \sqrt{3})/\sqrt{3}$. Диагональ $BD = 2OD = 2a$. По теореме Пифагора в ΔADB найдем: $AB = \sqrt{(BD^2 - AD^2)} = \sqrt{((2a)^2 - a^2)} = a\sqrt{3}$. Так как призма прямая, то площадь ее боковой поверхности равна $S_б = 2(AB + BC)AA_1$. То есть $S_б = 2a(1 + \sqrt{3})b$.
По условию $S_б = 120\sqrt{3}$. Имеем уравнение $120\sqrt{3} = 2a(1 + \sqrt{3})b$.
Отсюда $b = 60\sqrt{3}/(a(1 + \sqrt{3}))$. Подставляя $a = 2(1 + \sqrt{3})/\sqrt{3}$, получим:
$b = 60\sqrt{3}/(2(1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}))/\sqrt{3} = 90/(1 + \sqrt{3})^2$.
5) Теперь можем найти объем цилиндра:
$V_ц = \pi a^2 b = \pi[2(1 + \sqrt{3})/\sqrt{3}]^2\cdot 90/(1 + \sqrt{3})^2 = 120\pi$.
Ответ 120π.

Пример 5. Внутри правильного тетраэдра ABCD с ребром, равным 12, расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD. Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB. Найти объем конуса.

Решение:



1) Пусть в тетраэдре ABCD точки M, N, K, L - середины ребер AC, AD, BD и BC соответственно. Тогда отрезки MN и KL – средние линии ΔACD и ΔBCD, параллельные их общей стороне CD. Поэтому MN||KL, аналогично NK||ML. Значит, MNKL - параллелограмм. По свойству средней линии треугольника KL=0,5CD и NK=0,5AB. Но в правильном тетраэдре AB = CD, поэтому KL = NK. Поэтому параллелограмм MNKL – ромб. Пусть точка P – середина ребра CD. Т.к. все грани тетраэдра – правильные треугольники, то $CD\perp AP$ и $CD\perp BP$. Таким образом, $CD\perp APB$ и, значит, $CD\perp AB$. Но KL||DC и NK||AB, поэтому ромб MNKL – квадрат.

2) Пусть точка O – центр квадрата, тогда его вписанная окружность касается его сторон MN и KL в их серединах – точках Q и T соответственно и точка O – середина отрезка QT. ΔQTP равнобедренный и поэтому его медиана $PO\perp QT$. Аналогично PO перпендикулярна прямой, соединяющей середины сторон NK и ML квадрата MNKL. Отсюда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости следует, что $PO\perp MLK$.

   Поэтому PO – высота конуса, а его радиус равен половине длины стороны квадрата MNKL. Поэтому объем конуса можно найти по формуле:

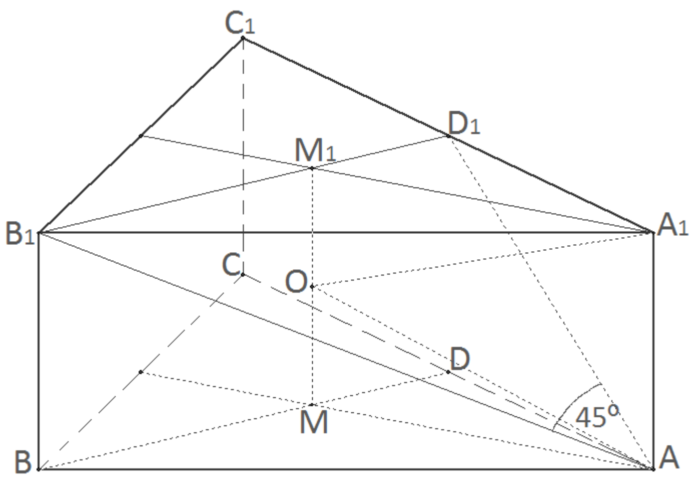
   $V_к = \pi(KL/2)^2\cdot PO/3$.

3) По условию ребро тетраэдра равно 12, тогда KL = 6, OT = 0,5KL = 3, BP $=6\sqrt{3}$, PT = 0,5BP = $3\sqrt{3}$. В ΔPOT по теореме Пифагора найдем $PO^2 = PT^2 - OT^2 = 27 - 9 = 18$. Отсюда $PO = 3\sqrt{2}$.

4) Объем конуса: $V_к = \pi(KL/2)^2\cdot PO/3 = \pi\cdot 9\cdot 3\sqrt{2} = 9\pi\sqrt{2}$.

   Ответ $9\pi\sqrt{2}$.

Пример 6. В шар радиуса $\sqrt{11}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Прямая AB_1 образует с плоскостью ACC_1 угол 45º. Найти объем призмы.



Решение:

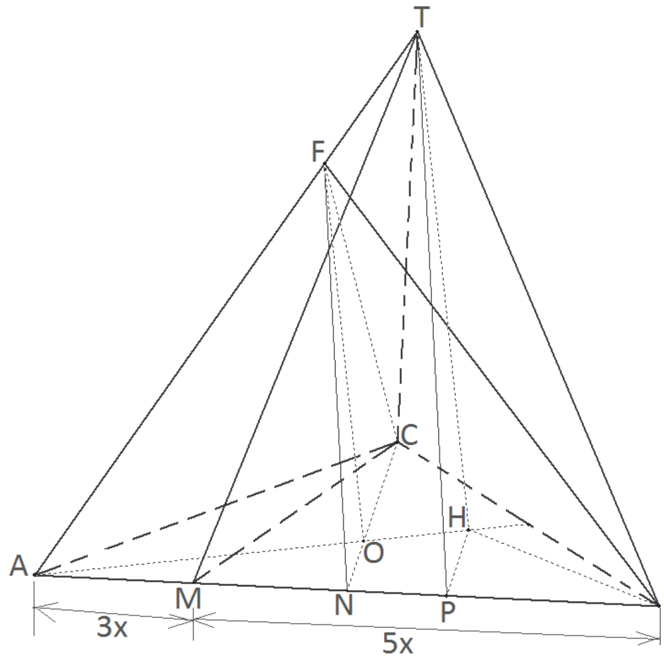
Пусть D_1 – середина ребра A_1C_1. Так как призма правильная, то $B_1D_1\perp A_1C_1$ и $B_1D_1\perp CC_1$ и по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $B_1D_1\perp ACC_1$. Значит, $\angle B_1AD_1 = 45^o$ как угол между прямой B_1A и плоскостью ACC_1 .

1) Пусть M и M_1 – центры оснований призмы, а O – середина отрезка MM_1. Тогда AM = BM = CM и $A_1M = B_1M = C_1M$. Так как призма правильная, то $OM\perp ABC$. Следовательно, по свойству наклонных и проекций OA = OB = OC и $OA_1 = OB_1 = OC_1$. Так как $OM = OM_1$ и $AM = A_1M_1$, то прямоугольные треугольники OMA

и OM_1A_1 равны по двум катетам. Значит, $OA = OA_1$. Следовательно точка O равноудалена от всех вершин призмы и поэтому является центром описанного около нее шара. Из условия радиус шара $OA = r = \sqrt{11}$.

2) Пусть $AB = a$. Тогда $B_1D_1 = a\sqrt{3}/2$. Но $\Delta\ B_1D_1A$ прямоугольный и, $\angle\ B_1AD = 45^{\circ}$. Следовательно, $B_1A = B_1D_1/\sin 45 = a\sqrt{6}/2$.
Из ΔABB_1 находим $BB_1 = \sqrt{(\ B_1A^2 - AB^2)} = \sqrt{(3a^2/2 - a^2\ )} = a/\sqrt{2}$.
3) Отрезок $MA = 2/3\ B_1D_1 = a/\sqrt{3}$, отрезок $OM = 1/2\ BB_1 = a/(2\sqrt{2})$. Поэтому из прямоугольного ΔMOA имеем: $OA^2 = OM^2 + AM^2 = a^2/8 + a^2/3 = 11$, откуда $a = 2\sqrt{6}$.
Объем призмы находим по формуле: $V = S_{ABC} \cdot BB_1$. Но $S_{ABC} = a^2\sqrt{3}/4$, $BB_1 = a/\sqrt{2}$.
Отсюда $V = 36$.
Ответ 36.

Пример 7. Около правильной пирамиды FABC описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания ABC пирамиды. Площадь сферы равна 48π. Точка M лежит на ребре AB так, что $AM : MB = 3 : 5$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B. Найти объем пирамиды TACM.



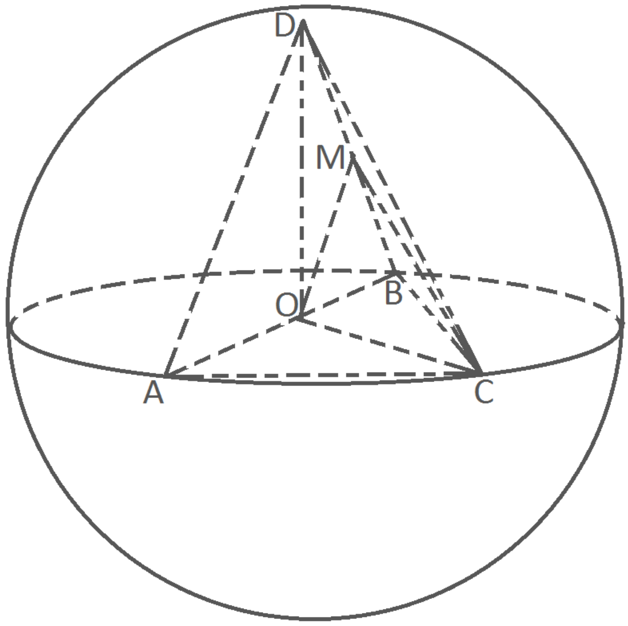
Решение:

1) Пусть O – центр сферы радиуса R, описанной около пирамиды FABC. Площадь сферы радиуса R равна $S = 4\pi R^2$. По условию $4\pi R^2 = 48\pi$, отсюда $R = 2\sqrt{3}$. Так как $O \in ABC$, то точка O является центром окружности радиуса R, описанной около ΔABC. ΔABC – правильный, поэтому точка O – точка пересечения его медиан.
Отсюда $AB = OA\sqrt{3} = 6$.

2) FABC - правильная пирамида, поэтому FO – ее высота и плоскость $AFO \perp ABC$. По условию $T \in AF$ и $TM = TB$. Опустим из точки T перпендикуляр TH на прямую AO. Так как $AFO \perp ABC$, то $TH \perp ABC$ и, значит, TH – высота пирамиды TACM, а отрезки HM и HB – проекции равных наклонных TM и TB. Таким образом, $HM = HB$, и поэтому ΔHBM равнобедренный, а его высота HP является медианой, т.е. $PM = PB$.

3) Объем V_{TACM} пирамиды TACM найдем по формуле: $V_{TACM} = S_{ACM} \cdot TH/3$.
Из условия $AM : MB = 3 : 5$ имеем $AM = 3AB/8 = 9/4$. Отсюда $MP = 15/8$ и $AP = 33/8$. В прямоугольном ΔAHP угол $\angle A = 30^{\circ}$, поэтому $AH = AP/\cos 30 = 11\sqrt{3}/4$.
Так как $OA = OF$, то прямоугольный ΔAOF равнобедренный, поэтому в прямоугольном ΔATH $\angle A = 45^{\circ}$ и, значит, $AH = TH$. Медиана CN правильного ΔABC является его высотой. Поэтому CN – высота ΔACM. Следовательно, площадь ΔACM можно найти по формуле: $S_{ACM} = CN \cdot AM/2$. Имеем $CN = 3CO/2 = 3\sqrt{3}$ и $S_{ACM} = 27\sqrt{38}$. Тогда $V_{TACM} = 1/3 \cdot 11\sqrt{3}/4 \cdot 27\sqrt{38} = 297/32$.
Ответ 297/32.

Пример 8. Отрезок AB – диаметр сферы. Точки C, D лежат на сфере так, что объем пирамиды ABCD наибольший. Найти тангенс угла между прямой CM и плоскостью ABD, если M – середина ребра BD.



Решение:

1) Пусть AB = 2R – диаметр сферы, а O – ее центр. Точки C и D лежат на сфере, поэтому OA = OB = OC = OD = R и сечения сферы плоскостями ABC и ABD – окружности радиуса R, описанные вокруг треугольников ABC и ABD. Значит, $\angle ADB = \angle ACB = 90^{\circ}$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр.

2) Пусть H – высота пирамиды ABCD, равная расстоянию от точки D до плоскости ABC, и h – высота ΔABC, опущенная на сторону AB. Поскольку точка D лежит на сфере, а плоскость ABC содержит центр сферы, то $H \le R$, причем H=R, если $DO \perp ABC$. Аналогично, поскольку точка C лежит на сфере, то $h \le R$, причем h=R, если $CO \perp AB$. Пирамида ABCD имеет объем $V_{ABCD} = S_{ABC} \cdot H/3$.
Следовательно, $V_{ABCD} = 1/2 \cdot AB \cdot h \cdot H/3 = 2R \cdot R \cdot R/6 = R^3/3$.
Таким образом, пирамида имеет наибольший объем, если Δ ABD и Δ ABC прямоугольные и равнобедренные.

3) Т.к. $DO \perp ABC$, то $DO \perp OC$. Но $AB \perp OC$, и поэтому по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $CO \perp ABD$. Значит, OM – проекция CM на плоскость ABD, и поэтому $\angle CMO$ - угол между прямой CM и плоскостью ABD.

4) Пусть $\angle CMO = \alpha$. Т.к. OA = R, а ΔBOD равнобедренный, то $OM = R/\sqrt{2}$.
Отсюда $tg\alpha = OC/OM = R/(R/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.
Ответ $\sqrt{2}$.