ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Комментарий. Цель данного раздела - поработать выполнение заданий на тождественные преобразования тригонометрических выражений, поскольку они встречаются в ЕГЭ как в качестве отдельных заданий, так и используются для решения тригонометрический уравнений и неравенств, а так же комбинированных заданий. Для решения задач на упрощение тригонометрических выражений требуется достаточно хорошо знать правила преобразования алгебраических выражений и тригонометрические формулы (уметь применять их как по одной, так и в комплексе).

Основные формулы тригонометрии

Перевод градусной меры угла в радианную и обратно. Пусть $\alpha°$ - градусная мера угла, β - радианная, тогда справедливы формулы:

$$\beta = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} \qquad \alpha^\circ = \frac{180^\circ \cdot \beta}{\pi}$$

Формулы зависимости между функциями одного и того же аргумента.

1.	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	4.	$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$
2.	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	5.	$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
3.	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	6.	$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

Формулы сложения.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Формулы двойных и половинных углов.

1.	$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$	5.	$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
2.	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	6.	$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
3.	$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$	7.	$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$
4.	$\sin 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$	8.	$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$

Формулы преобразования суммы в произведение.

$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$1-\cos\alpha=2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	$1+\cos 2\alpha=2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$

Формулы преобразования произведения в сумму.

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

Формулы приведения.

φ	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\varphi$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\varphi$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\varphi$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\varphi$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

Рассмотрим сначала достаточно простые задания на применение формул тригонометрии.

Пример 1. Вычислить значение $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=0.3$, α - угол впервой четверти.

Решение.

Применим основное тригонометрическое тождество, связывающее тригонометрические функции $y=\sin\alpha$, $y=\cos\alpha$: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Так как по условию задачи $\cos\alpha=0.3$, то $\cos^2\alpha=0.09$. Значит, $\sin^2\alpha+0.09=1$, $\sin^2\alpha=1-0.09=0.91$. Решая уравнение $\sin^2\alpha=0.91$, получаем два случая ($\sin\alpha=\sqrt{0.91}$ или $\sin\alpha=-\sqrt{0.91}$), из которых, обращая внимание на то, какой четверти принадлежит искомый угол, следует выбрать один. Вспомним, что в первой четверти все тригонометрические функции имеют знак «+». Следовательно, $\sin\alpha=\sqrt{0.91}$.

Ответ: $\sin\alpha=\sqrt{0.91}$.

Пример 2. Вычислить значение $tg\alpha$, если $ctg\alpha=0.2$.

Решение.

Воспользуемся формулой, связывающей тригонометрические функции $y=tg\alpha$, $y=ctg\alpha$: $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$. Подставляя заданное в условии значение 0,2, получаем, что $tg\alpha\cdot 0.2=1$, откуда $tg\alpha=5$

Ответ: 5.

Пример 3. Упростить выражения

1) $\sin 20^0 \cos 40^0 + \cos 20^0 \sin 40^0$

2) $\sin 45^0 \cos 15^0 - \cos 45^0 \sin 15^0$

3) $\cos 12^0 \cos 18^0 - \sin 12^0 \sin 18^0$

4) $\cos 98^0 \cos 8^0 + \sin 98^0 \sin 8^0$

5) $\dfrac{tg\, 22^0 + tg\, 23^0}{1 - tg\, 22^0 tg\, 23^0}$

6) $\dfrac{tg\, 45^0 - tg 15^0}{1 + tg 15^0 tg 45^0}$

Решение.

Данные задания на применение формул сложения.

1) $\sin 20^0 \cos 40^0 + \cos 20^0 \sin 40^0 = \sin\left(20^0 + 40^0\right) = \sin 60^0$. Обратимся далее к таблице значений тригонометрических функций. Получаем, что $\sin 20^0 \cos 40^0 + \cos 20^0 \sin 40^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\sin 45^0 \cos 15^0 - \cos 45^0 \sin 15^0 = \sin\left(45^0 + 15^0\right) = \sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Воспользуемся формулой «косинус суммы», тогда $\cos 12^0 \cos 18^0 - \sin 12^0 \sin 18^0 = \cos\left(12^0 + 18^0\right) = \cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4) $\cos 98^0 \cos 8^0 + \sin 98^0 \sin 8^0 = \cos\left(98^0 - 8^0\right) = \cos 90^0 = 0$.

5) Применим формулу «тангенс суммы», получим $\dfrac{tg\, 22^0 + tg\, 23^0}{1 - tg\, 22^0 tg\, 23^0} = tg\,(22^0 + 23^0) = tg\, 45^0 = 1$.

6) $\dfrac{tg\, 45^0 - tg 15^0}{1 + tg 15^0 tg 45^0} = tg\left(45^0 - 15^0\right) = tg\, 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 0, 1, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 4. Вычислить

1) $\sin 10\pi$

2) $tg\, \dfrac{41\pi}{4}$

3) $\sin 75^0$

4) $\cos 105^0$

5) $2\sqrt{2} \cos 15^0$

Решение.

1) Воспользуемся свойством периодичности функции $y = \sin x$, тогда $\sin 10\pi = \sin(5 \cdot 2\pi) = \sin 0 = 0$.

2) Так как период функции $y = tgx$ равен π, получаем $tg\, \dfrac{41\pi}{4} = tg\left(10\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = tg\, \dfrac{\pi}{4} = 1$

3) Представим 75^0 в виде суммы двух «удобных» слагаемых: $75^0 = 45^0 + 30^0$. Следовательно, $\sin 75^0 = \sin\left(45^0 + 30^0\right) = \sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0$. Обратимся к табличным значениям тригонометрических функций, получим $\sin 75^0 = \sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

4) $\cos 105^0 = \cos\left(60^0 + 45^0\right) = \cos 60^0 \cos 45^0 - \sin 60^0 \sin 45^0 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$. Окончательно получаем, что $\cos 105^0 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

5) Для вычисления значения $\cos 15^0$ представим 15^0 как $15^0 = 45^0 - 30^0$ (или $15^0 = 60^0 - 45^0$). Тогда $\cos 15^0 = \cos\left(45^0 - 30^0\right) = \cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0$. Обратимся далее к табличным значениям тригонометрических функций. Получаем, что $\cos 15^0 = \cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$. следовательно, $2\sqrt{2}\cos 15^0 = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right) = \sqrt{3}+1$.

Ответ: 0, 1, $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$, $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)$, $\sqrt{3}+1$.

Отдельную группу заданий этого типа составляют задания на вычисление одних тригонометрических функций по известным другим.

Пример 1. Известно, что $\sin\alpha - \cos\alpha = 0,3$. Найти:

1) $\sin 2\alpha$;

2) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;

3) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

Решение.

1) Возведем в квадрат обе части заданного в условии примера равенства и используем формулу «квадрат разности», получаем, что

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0,09$.

Вспомним основное тригонометрическое тождество и применим формулу синуса двойного угла:

$1 - \sin 2\alpha = 0,09$, откуда

$\sin 2\alpha = 1 - 0,09 = 0,91$.

2) Воспользуемся полученным результатом для ответа на вопрос 2.

Для этого сумму $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ представим в специальном виде:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-\tfrac{1}{2}\cdot\sin^2 2\alpha=1-\tfrac{1}{2}\cdot 0,91=0,545.$$

Комментарий. Специальный вид, использованный при решении данного примера, позволяет применить формулу «квадрат суммы» и использовать результат, полученный в пункте 1. При последующих преобразованиях использована формула синуса двойного угла.

3) Обратим внимание, что для вычисления значения выражение $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$ можно представить в виде суммы кубов.

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=1\cdot(0,545-\tfrac{1}{4}\cdot 0,91)=0,3175.$$

Ответ: 1) $0,91$; 2) $0,545$; 3) $0,3175$.

Пример 2. Найти tgα, если $\frac{3\sin\alpha+4\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=5.$

Решение.

Проверкой можно убедиться, что при $\cos\alpha=0$ приведенное равенство неверно. Поэтому следует разделить числитель и знаменатель дроби на cosα (на основании основного свойства дроби):

$\frac{3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+4\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-2\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=5$, следовательно $\frac{3tg\alpha+4}{tg\alpha-2}=5,$ тогда

$3tg\alpha+4=5(tg\alpha-2),$

раскрывая скобки приведем далее подобные слагаемые

3tgα + 4 = 5tgα – 10, 2tgα = 14, получаем, что *tgα = 7*.

Ответ: 7.

Пример 3. Вычислить cosα, если cos2α = ¾ и $\frac{3\pi}{2}<2\alpha<2\pi.$

Решение.

Как известно, $\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$. Выясним, в каких пределах лежит угол α и какой знак при этом имеет его косинус. Преобразуем заданное в условии задачи двойное неравенство. Разделив одновременно все три части двойного неравенства на *2*, получим

$\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$, то есть угол α располагается во второй четверти, и следовательно $\cos\alpha<0.$

В приведенной выше формуле выберем знак «минус», $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1+\frac{3}{4}}{2}}=-\sqrt{\frac{7}{8}}=-\frac{\sqrt{14}}{4}.$

Ответ: $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{14}}{4}.$

Комментарий. Следующая группа заданий – вычисление значений различных тригонометрических выражений с использованием тригонометрических формул.

Пример 4. Найти значение выражения $\frac{\sin^3 19°-\cos^3 19°}{\sin 19°-\cos 19°}-\frac{\sin^2 57°+\sin^2 33°}{tg19°+ctg19°}$.

Выполним упрощение каждой дроби по отдельности.

С целью сокращения дроби $\frac{\sin^3 19°-\cos^3 19°}{\sin 19°-\cos 19°}$ воспользуемся формулой «разность кубов», получим:

$$\frac{\sin^3 19°-\cos^3 19°}{\sin 19°-\cos 19°}=\frac{(\sin 19°-\cos 19°)(\sin^2 19°+\sin 19°\cos 19°+\cos^2 19°)}{\sin 19°-\cos 19°}.$$

Рассмотрим далее выражение $\sin^2 19° + \sin 19° \cos 19° + \cos^2 19°$. Нужно заметить, что первое третье слагаемые в сумме дают единицу в силу основного тригонометрического тождества. Таким образом $\frac{\sin^3 19° - \cos^3 19°}{\sin 19° - \cos 19°} =$
$= (\sin^2 19° + \cos^2 19°) + \sin 19° \cos 19° = 1 + \sin 19° \cos 19°$.

Обратимся далее к преобразованию второй дроби. Применим одну из формул приведения: $\sin 33° = \cos(90° - 33°) = \cos 57°$. Поэтому $\sin^2 57° + \sin^2 33° = \sin^2 57° + \cos^2 57° = 1$.

Тогда $\frac{\sin^2 57° + \sin^2 33°}{tg19° + ctg19°} = \frac{1}{\frac{\sin 19°}{\cos 19°} + \frac{\cos 19°}{\sin 19°}} = = \frac{\sin 19° \cos 19°}{\sin^2 19° + \cos^2 19°} = \sin 19° \cos 19°$.

Окончательно получаем:
$\frac{\sin^3 19° - \cos^3 19°}{\sin 19° - \cos 19°} - \frac{\sin^2 57° + \sin^2 33°}{tg19° + ctg19°} = 1 + \sin 19° \cos 19° - \sin 19° \cos 19° = 1.$

Ответ: *1*.

Пример 5. Вычислить *sin10°sin30°sin50°sin70°*.

Используем формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму: sin10°sin50° = ½ (cos40° – cos60°) = ½ *cos40°* – ¼ . Подставим в первоначальное произведение это выражение и учтем, что *sin30°* = ½, получаем

$$\frac{1}{4}(\sin 70° \cos 40° - \frac{1}{2}\sin 70°) =$$
$$= \frac{1}{8}(\sin 110° + \sin 30° - \sin 70°) = \frac{1}{8}(\sin(180° - 70°) + \frac{1}{2}) =$$
$$= \frac{1}{8}\left(\sin 70° + \frac{1}{2} - \sin 70°\right) = \frac{1}{16}.$$

Ответ: $\frac{1}{16}$.

Комментарий. Для выполнения аналогичных заданий необходимо знание не только тригонометрических формул, но и табличных значений тригонометрических функций.

Рассмотрим далее примеры упрощения тригонометрических выражений с произвольным аргументом.

Пример 6. Упростить выражение $\frac{\cos 2\alpha}{ctg^2\alpha - tg^2\alpha}$.

Так как числитель заданной дроби имеем достаточно простой вид, начнем с упрощения знаменателя. Для этого применим представление $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$:

$$ctg^2\alpha - tg^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Приведем полученную разность дробей к общему знаменателю:

$$ctg^2\alpha - tg^2\alpha = \frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{4\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}.$$

Следовательно, $\frac{\cos 2\alpha}{ctg^2\alpha - tg^2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha \sin^2 2\alpha}{4\cos 2\alpha} = = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$

Ответ: $\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$

Пример 7. Доказать тождество $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = -\frac{2}{\cos\alpha}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Комментарий. Задания на доказательство тождеств вполне можно воспринимать как задания на упрощение выражений, причем с готовым ответом в виде более простой и компактной части равенства.

Решение.

В частности, в данном примере попробуем упростить левую часть, чтобы получить такое же выражение, как справа. Для этого помножим числитель и знаменатель подкоренного выражения на $1+\sin\alpha$.

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}} = \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}.$$

Вспомнив, что $\sqrt{x^2} = |x|$, получаем $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \left|\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right|.$

Исследуем далее знак числителя и знаменателя подмодульного выражения:

$\sin\alpha \ge -1,$ тогда $1+\sin\alpha \ge 0,$ поэтому $|1+\sin\alpha| = 1+\sin\alpha;$

при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\cos\alpha < 0,$ следовательно, $|\cos\alpha| = -\cos\alpha.$

Таким образом,

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = -\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Аналогичным образом преобразуем второе слагаемое левой части: $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = -\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}.$

Тогда $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = -\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1+\sin\alpha+1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{2}{\cos\alpha}$, что и требовалось доказать.

Пример 8. Найти значение следующих тригонометрических выражений:

$\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}\, 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}; 0 < \alpha < \pi$.

Решение.

Выпишем формулы для вычисления искомых функций.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$,

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$,

$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

$\cos^2 = 1 - 2\cdot\frac{16}{25} = 1 - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25}$.

Из основного тригонометрического тождества вычислим

$\cos\alpha$, $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \quad = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5};$

Далее найдем значения искомых выражений:

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7};$$

Ответ: $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}$.

Пример 9. Доказать тождество $\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = 1;$

Решение.

Приведем левую часть к 1:

$$\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = \left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1\cdot$$

Тождество доказано.

Пример 10. Вычислить значение выражения

$$\sin\frac{8\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}+\cos\frac{29\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{\cos\frac{23\pi}{3}\cdot\sin\frac{11\pi}{6}}+7$$

Решение.

Обратим внимание, что $\frac{8\pi}{3} = 2\pi+\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6} = 2\pi-\frac{\pi}{6}$, $\frac{29\pi}{6} = 5\pi-\frac{\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3} = \pi+\frac{\pi}{3}$, $\frac{23\pi}{3} = 8\pi-\frac{\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6} = 2\pi-\frac{\pi}{6}$.

Далее, используя формулы приведения, получим:

$$\sin\frac{8\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}+\cos\frac{29\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{\cos\frac{23\pi}{3}\cdot\sin\frac{11\pi}{6}}+7 =$$

$$= \sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(5\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{\cos\left(8\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)}+7 =$$

$$= \sin\frac{2\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}+7.$$

Воспользуемся табличными значениями и свойствами тригонометрических функций:

$$\sin\frac{8\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}+\cos\frac{29\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{\cos\frac{23\pi}{3}\cdot\sin\frac{11\pi}{6}}+7 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}+7 = -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-4+7 = 0.$$

Итак, значение выражения *0*.

Ответ: *0*.

Комментарий. Для выполнения заданий, связанных с обратными тригонометрическими функциями, нужно, во-первых, четко помнить определения этих понятий:

$$\alpha = \arcsin a \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = a \\ -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\alpha = \arccos a \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = a \\ 0 \le \alpha \le \pi \end{cases}$$

$$\alpha = arctga \Leftrightarrow \begin{cases} tg\alpha = a \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\alpha = arcctga \Leftrightarrow \begin{cases} ctg\alpha = a \\ 0 < \alpha < \pi \end{cases}$$

Удобно при решении таких задач сделать замену (например, *α = arcsin x*) и работать с более привычным объектом – углом *α*, лежащем в первой или четвертой четверти тригонометрического круга, синус которого равен *x*. При этом выясняется, что задача намного проще, чем казалось вначале.

Пример 11. Вычислить *cos(4arctg 5)*.

Решение.

Пусть *α = arctg5*, тогда *tg α=5*. Требуется найти *cos4α*. Вычислим вначале *cos2α*, используя универсальную подстановку: $\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \frac{1-25}{1+25} = -\frac{12}{13}$. Тогда получаем, что

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{144}{169} - 1 = \frac{119}{169}.$$

Ответ: $\frac{119}{169}$.

Пример 12. Выразить через все обратные функции $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Решение.

Пусть $\alpha = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$. Угол *α* лежит в четвертой четверти, следовательно, $\cos\alpha > 0$.

Найдем все тригонометрические функции угла α: $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

$tg\alpha = -\frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $ctg\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

В четвертой четверти находятся арктангенсы отрицательных чисел, поэтому можно утверждать, что $\alpha = arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Но $\alpha \neq \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$, так как арккосинусы положительных чисел принадлежат первой четверти. В силу четности косинуса $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, при этом $-\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то есть $-\alpha = \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$, тогда $\alpha = -\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Арккотангенсы отрицательных чисел расположены во второй четверти. Например, $arcctg\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \alpha + \pi$, следовательно, $\alpha = arcctg\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) - \pi$. Таким образом, угол α выражен через все обратные функции.

Ответ: $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) = -\arccos\frac{\sqrt{5}}{3} = arctg\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = arcctg\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) - \pi.$

Пример 13. Найти *arcsin(sin12)*.

Решение.

По условию задачи требуется найти угол, синус которого равен синусу угла в 12 радиан и который принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Заметим, что $3\frac{1}{2}\pi < 12 < 4\pi,$ поэтому $-\frac{\pi}{2} < 12 - 4\pi < 0.$

Поскольку $\sin 12 = \sin(4\pi + (12 - 4\pi)) = \sin(12 - 4\pi),$ угол $12 - 4\pi$ является искомым углом: его синус равен sin12, и он находится в области возможных значений арксинуса.

Ответ: arcsin(sin12) = $12 - 4\pi$.

Пример 14. Вычислить $\sin\left(\arccos\frac{12}{13} - arctg 7\right).$

Решение.

Введем два угла: $\alpha = \arccos\frac{12}{13}$ и $\beta = arctg 7.$ Оба они лежат в первой четверти, значит, все их тригонометрические функции положительны. Мы знаем, что $\cos\alpha = \frac{12}{13},\ tg\beta = 7$. Требуется найти синус суммы этих углов, а для этого нужно знать их синусы и косинусы.

Во-первых, $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}.$

Во-вторых, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+49}} = \frac{1}{5\sqrt{2}};\ \sin\beta = tg\beta \cdot \cos\beta = \frac{7}{5\sqrt{2}}$.

Следовательно, $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha = \frac{5}{13}\cdot\frac{1}{5\sqrt{2}} - \frac{7}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{12}{13} = -\frac{79}{65\sqrt{2}}$.

Ответ: $-\frac{79}{65\sqrt{2}}$.