71 Тригонометрические уравнения и неравенства

Комментарий. Устойчивым является заблуждение абитуриентов о том, что при решении тригонометрических уравнений не нужна проверка. Это так далеко не всегда.

При решении тригонометрических уравнений проверка найденных решений необходима, если:

1) в процессе решения применялись алгебраические преобразования, которые могли привести к расширению области определения уравнения (например, сокращение дробей),

2) в процессе решения применялись тригонометрические преобразования, которые могли привести к расширению области определения уравнения (речь идет о применении тригонометрических формул, левая и правая части которых имеют различные области определения, например:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\sin x;\quad \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\cos x;\quad \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}=tgx;\quad tgxctgx=1;\quad \frac{1-\cos x}{\sin x}=tg\frac{x}{2}),$$

3) в процессе решения применялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень.

Каждая из указанных причин может привести к появлению посторонних корней. Заметим, что применение формул из пункта 2) «справа налево», напротив может привести к потере корней, в силу сужения области определения.

Решение тригонометрических уравнений в большинстве случаев проводится либо с помощью замены переменной, либо разложения на множители, но и тот, и другой способ применяется в разных вариантах в зависимости от вида конкретного уравнения. Поэтому в данном разделе вам предлагается более подробная классификация типов тригонометрических уравнений и методов их решения.

Пример 1. Решить уравнение $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2ctgx-1$.

Решение.

Обе части уравнения легко представляются как выражение, зависящее только от tgx:

$$\frac{tgx+1}{1-tgx}=\frac{2}{tgx}-1.$$

Далее, заменой $tgx=y$, тригонометрическое уравнение рационализуется:

$$\frac{y+1}{y-1}=\frac{2}{y}-1.$$

В итоге $y=\frac{1}{2}$, т.е. $tgx=\frac{1}{2}$ и $x=arctg\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z$.

Однако можно заметить, что значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ также удовлетворяют исходному уравнению. Это потерянные корни. В чем причина?! В основе преобразований формулы, сужающие область определения: $\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=tg(\alpha+\beta)$

(в нашем случае $\alpha=x,\beta=\frac{\pi}{4}$ и $ctgx=\frac{1}{tgx}$).

Комментарий. Еще раз настойчиво предостерегаем от применения приемов решения уравнений, ведущих к сужению области определения и возможной потере корней.

Пример 2. Решить уравнение: $\sin(x-a)=\sin x+\sin a.$

Решение.

Перераспределим компоненты уравнения: $\sin(x-a)-\sin a=\sin x.$

Далее, в левой части воспользуемся формулой $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

Имеем: $2\cos\frac{x-a+a}{2}\sin\frac{x-a-a}{2}=\sin x,$ т.е. $2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x-2a}{2}=\sin x.$

Теперь представим *sin x* как синус двойного аргумента: $2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x-2a}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$

Перенесем все компоненты уравнения в одну часть и вынесем общий множитель за скобки:

$$\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x-2a}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0,$$

$$\cos\frac{x}{2}(\sin\frac{x-2a}{2}-\sin\frac{x}{2})=0.$$

Вновь воспользуемся формулой разности синусов:

$$\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos\frac{x-2a+x}{4}\sin\frac{x-2a-x}{4}=0,$$

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x-a}{2}\sin\frac{a}{2}=0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0,\\ \cos\frac{x-a}{2}=0,\\ \sin\frac{a}{2}=0.\end{array}\right.$$

Таким образом, уравнение имеет два семейства корней $x_1=\pi+2\pi n$ и $x_2=a+\pi+2\pi m$, $n,m\in Z,$ если $a\neq 2\pi k, k\in Z$ и бесконечно много корней: $x\in R,$ если $a=2\pi k, k\in Z.$

Ответ: Если $a\neq 2\pi k, k\in Z$, то $x_1=\pi+2\pi n$, $x_2=a+\pi+2\pi m$, $n,m\in Z.$ Если $a=2\pi k, k\in Z$, то $x\in R$.

Рассмотрим также примеры решения комбинированных уравнений, т.е. уравнений, в которых над переменной, в той или иной комбинации производятся иррациональные, показательно-степенные, логарифмические и тригонометрические операции. Такого рода задания вызывают у абитуриентов определенные трудности. В основе этих трудностей, как правило, некая негативная психологическая установка. Абитуриент как бы говорит себе: «таких уравнений я в школе не решал; что-то слишком много всего накручено; это мне не по силам». В этой связи, дадим два совета.

Совет первый: по внешнему виду задания нельзя судить о его простоте или трудности; трудность – это характеристика не задания, а действенности ваших знаний и умений; начинайте решать, пробуйте, пытайтесь, несмотря на то, что задание кажется вам «страшным» и недоступным.

Совет второй: решайте комбинированное уравнение как бы по действиям, отграничивая иррациональную часть решения от логарифмической, логарифмическую от тригонометрической и т.п.; осуществить это можно введением новых переменных; в конце решения осуществляйте, тем или иным образом, проверку корней.

Пример 3. Решить уравнение.

$$\sin(3^{x-1}+3^{x-2})\cos(3^{x-1}+3^{x-2})=\frac{1}{4}.$$

Решение.

Пусть $3^{x-1}+3^{x-2}=y,$ тогда $\sin y\cos y=\frac{1}{4}$. Далее решаем уже не комбинированное, а тригонометрическое уравнение. Воспользуемся формулой синуса двойного аргумента:

$$2\sin y\cos y=\frac{1}{2},\ \ \sin(2y)=\frac{1}{2},\ \ 2y=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z,\ \ y=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z.$$

«Тригонометрическая часть» решения завершена; далее необходимо решить показательное уравнение с параметром *n*:

$$3^{x-1}+3^{x-2}=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z,$$

Прежде всего, выясним, при всех ли *n* у данного уравнения существуют корни. Ясно, что, поскольку левая часть уравнения, как сумма степеней тройки, всегда положительна, то условие существования корней уравнения: $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n>0, n\in Z.$ Решим это неравенство. Если *n>0*, то $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n>0,\ \frac{\pi}{2}n>\frac{\pi}{12}>0, n>\frac{1}{6}.$ Очевидно, что полученная система $\begin{cases} n<0, \\ n>\frac{1}{6} \end{cases}$ несовместна. Если $n\ge 0$, то $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n>0,\ \frac{\pi}{2}n>-\frac{\pi}{12}>0, n>-\frac{1}{6}.$ Система $\begin{cases} n\ge 0, \\ n>-\frac{1}{6} \end{cases}$ равносильна неравенству $n\ge 0$.

Таким образом, учитывая, что $n\in Z$, получаем вывод: корни у данного уравнения существуют при значениях параметра *n: n =0, 1, 2, 3, …* Именно при этом условии решаем далее показательное уравнение.

Преобразуем левую часть уравнения по свойствам степени:

$$3^x\cdot\frac{1}{3}+3^x\cdot\frac{1}{9}=\frac{4}{9}\cdot 3^x.$$

Тогда, имеем:

$$\frac{4}{9}\cdot 3^x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n,\ n=0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$3^x=(-1)^n\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{9}{4}\cdot\frac{\pi}{2}n,\ n=0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$3^x = (-1)^n \frac{3\pi}{16} + \frac{9\pi}{8} n,$$ *n =0, 1, 2, 3, …*

Таким образом, $x = \log_3 ((-1)^n \frac{3\pi}{16} + \frac{9\pi}{8} n),$ *n =0, 1, 2, 3, …* Это «семейство» логарифмов и составляет множество корней исходного комбинированного (показательно – тригонометрического) уравнения.

Ответ: $x = \log_3 ((-1)^n \frac{3\pi}{16} + \frac{9\pi}{8} n),$ *n =0, 1, 2, 3, …*

Пример 4. Решить уравнение. $\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x = 2.$

Решение.

Прежде всего, укажем область определения уравнения. Она задается условиями:

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ \sin x \neq 1, \\ \cos x > 0, \\ \cos x \neq 1, \end{cases} \text{ т.е. системой } \begin{cases} 0 < \sin x < 1, \\ 0 < \cos x < 1. \end{cases}$$

Пусть, теперь $\sin x = a, \cos x = b$. Тогда, вместо комбинированного, имеем логарифмическое уравнение с двумя переменными *a* и *b*: $\log_a b + \log_b a = 2,$ это уравнение преобразуется в уравнение: $\log_a b + \frac{1}{\log_a b} = 2.$ Далее, если положить, что $\log_a b = y,$ то имеем простое рациональное уравнение: $y + \frac{1}{y} = 2.$ Его единственный корень $y = 1.$ Значит, $\log_a b = 1,$ т.е. $\log_a b = \log_a a.$

Отсюда, *b=a*, т.е. $\cos x = \sin x.$ Корнями этого тригонометрического уравнения является семейство: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$ Нетрудно видеть, что оно удовлетворяет области определения исходного уравнения, а значит, и составляет множество его корней.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

Пример 5. Решить уравнение $\log_9 \sin 2x = \log_3 \sqrt{\frac{\sin x}{5}}.$

Решение.

Заметим, что решения всякого уравнения, следует начинать с пристального, внимательного взгляда, призванного увидеть в уравнении, неравенстве и т.п. что-нибудь интересное, особенное, какую-нибудь «изюминку», позволяющую применить при решении некий нестандартный прием. Эта «изюминка» не всегда есть, но проглядеть ее обидно. В данном уравнении маленькая «изюминка» есть: если в правой части уравнения мы воспользуемся (к сожалению часто забытым абитуриентами) свойством логарифма: $\log_a f(x) = \log_{a^r} f^r(x), r \in R,$ то сразу, как говорится, «убъем двух зайцев»: и избавимся от радикала, и перейдем к одному основанию логарифма.

Итак, если $r = 2,$ то $\log_9 \sin 2x = \log_9 \frac{\sin x}{5}.$ Далее, имеем тригонометрическое уравнение $\sin 2x = \frac{\sin x}{5}.$ Воспользуемся формулой синуса двойного аргумента:

$$5\sin 2x - \sin x = 0,\ 10\sin x \cos x - \sin x = 0,\ \sin x(10\cos x - 1) = 0,\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{10}. \end{array}\right.$$

Решением первого уравнения совокупности является семейство: $x = \pi n, n \in Z$; решением второго: $x = \pm \arccos \frac{1}{10} + 2\pi k, k \in Z.$

Необходимо провести проверку найденных корней. Для этого выпишем условия, задающие область определения исходного уравнения:

$$\begin{cases} \sin 2x > 0, \\ \sin x > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sin x \cos x > 0, \\ \sin x > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

Ясно, что первое из найденных семейств – семейство посторонних корней, т.к. нарушено условие $\sin x > 0$, а из второго семейства посторонними корнями являются корни вида: $x = -\arccos \frac{1}{10} + 2\pi k, k \in Z$ (т.к., в этом случае, хотя $\cos x > 0,$ но $\sin x < 0$).

Таким образом, корни исходного комбинированного уравнения: $x = \arccos \frac{1}{10} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $x = \arccos \frac{1}{10} + 2\pi k, k \in Z$.

Пример 6. Решить уравнение $2\log_5 |ctgx| = \log_{0,2} \frac{\sin x}{5\sin x - 4\cos x}.$

Решение.

Внесем множитель два в левой части уравнения под логарифм в качестве показателя степени: $\log_5 |ctgx|^2 = \log_{0,2} \frac{\sin x}{5\sin x - 4\cos x},$ и перейдем к основанию логарифма пять в левой части уравнения:

$$\log_5 |ctgx|^2 = \log_{\frac{1}{5}} \frac{\sin x}{5\sin x - 4\cos x},$$

$$\log_5 |ctgx|^2 = (-1) \cdot \log_5 \frac{\sin x}{5\sin x - 4\cos x},$$

$$\log_5 |ctgx|^2 = \log_5 \frac{5\sin x - 4\cos x}{\sin x}.$$

«Отбрасывая логарифмы» получаем: $|ctgx|^2 = \frac{5\sin x - 4\cos x}{\sin x},$ и далее, учитывая, что $|f(x)|^2 = f^2(x),$ и переходя к разности дробей в левой части уравнения:

$$ctg^2 x = 5 - 4ctgx.$$

Это квадратное уравнение относительно $ctgx,$ корни которого 1 и – 5. Т.е. имеем совокупность: $\left[\begin{array}{l} ctgx = 1, \\ ctgx = -5. \end{array} \right.$

Решением первого уравнения совокупности является семейство: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;$ решением второго: $x = arcctg(-5) + \pi k = \pi - arcctg 5 + \pi k, k \in Z.$ /Здесь применено тождество: $arcctg(-t) = \pi - arcctgt$./

Далее необходимо провести проверку корней. В качестве способа проверки в данном случае, изберем непосредственную подстановку в исходное уравнение. При этом ясно, что речь идет о подстановке в исходное уравнение лишь одного значения принадлежащего данному семейству. Этого достаточно. Удобнее всего, взять значения *n=0* и *x=* -1. Но можно поступить ещё проще: в равносильности совокупностей

$$\left[\begin{array}{l} ctgx=1, \\ ctgx=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z, \\ x=\pi-arcctg5+\pi k, k\in Z \end{array}\right.$$

мы не сомневаемся, а поэтому в исходное уравнение можно подставлять непосредственно каждое из получившихся значений *ctg x* .

В каждом случае изберем более удобный из описанных подходов.

Пусть $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$ и $n=0,$ т.е. $x=\frac{\pi}{4}.$ Тогда имеем:

$$2\log_5|1|=\log_{0,2}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{5\sin\frac{\pi}{4}-4\cos\frac{\pi}{4}},$$

$$2\log_5 1=\log_{0,2}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$2\log_5 1=\log_{0,2}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$2\log_5 1=\log_{0,2}1,$$

0=0.

Таким образом, семейство: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$ входит во множество корней исходного уравнения.

Пусть теперь $ctgx=-5$ (здесь реализуем второй подход, ибо осуществлять непосредственную подстановку $x=-arcctg5$ неудобно). Тогда, поскольку $\frac{1}{\sin^2 x}=1+ctg^2 x,$ $\sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{26}}$ и $\cos x=\pm\frac{5}{\sqrt{26}}$. Далее, т.к. $ctgx<0$, то $\sin x$ и $\cos x$ должны быть разных знаков; имеем: $\sin x=\frac{1}{\sqrt{26}}$ и $\cos x=-\frac{5}{\sqrt{26}}$, или, $\sin x=-\frac{1}{\sqrt{26}}$ и $\cos x=\frac{5}{\sqrt{26}}$. В первом случае $\frac{\sin x}{5\sin x-4\cos x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{26}}}{\frac{5}{\sqrt{26}}+\frac{20}{\sqrt{26}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{26}}}{\frac{25}{\sqrt{26}}}=\frac{1}{25},$ во втором случае $\frac{\sin x}{5\sin x-4\cos x}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{26}}}{-\frac{5}{\sqrt{26}}-\frac{20}{\sqrt{26}}}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{26}}}{-\frac{25}{\sqrt{26}}}=\frac{1}{25}.$

После подстановки в исходное уравнение имеем:

$$2\log_5|-5|=\log_{0,2}\frac{1}{25},$$

$$2\log_5 5=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{25},$$

2=2.

Таким образом, семейство: $x=\pi-arcctg5+\pi k, k\in Z$ также входит во множество корней исходного уравнения.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$, $x=\pi-arcctg5+\pi k, k\in Z$.

Пример 7. Решить уравнение $\sin\pi\sqrt{x}=-1$

Решение:

$$\pi\sqrt{x}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in \mathrm{Z}$$

$$\sqrt{x}=-\frac{1}{2}+2n, n\in \mathrm{Z}$$

По определению арифметического квадратного корня перейдем к равносильной системе уравнений.

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}+2n\geq 0, n\in \mathrm{Z}\\ x=\left(-\frac{1}{2}+2n\right)^2, n\in \mathrm{Z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}n\geq \frac{1}{4}, n\in \mathrm{Z}\\ x=\left(-\frac{1}{2}+2n\right)^2, n\in \mathrm{N}\end{cases}$$

Ответ: $x=\left(-\frac{1}{2}+2n\right)^2, n\in \mathrm{N}$

Пример 8. Решить уравнение $\frac{1}{\sin x}-1=ctgx-\cos x.$

На первом этапе решения уравнения выясним область допустимых значений и выполним тождественные преобразования:

$$\frac{1}{\sin x}-1=ctgx-\cos x; x\neq \pi n, n\in \mathrm{Z}$$

$$\frac{1-\sin x}{\sin x}=\frac{\cos x-\cos x\sin x}{\sin x}$$

$$\sqrt{1-x}(x-5)=0$$

$$1-\sin x=\cos x(1-\sin x)$$

$$1-\sin x-\cos x(1-\sin x)=0$$

$$(1-\sin x)(1-\cos x)=0$$

$\sin x=1$ или $\cos x=1$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in \mathrm{Z}$ $\quad x=2\pi l, l\in \mathrm{Z}$

Решением уравнения является:

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in \mathrm{Z}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in \mathrm{Z}$

Комментарий. Данный прием решения тригонометрического уравнения принято называть методом разложения на множители.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0\cdot$$

Используем в процессе решения формулы понижения степени, получим

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0$$

$$4 - 2\sin^2 2x - 8\sin 2x + 3\sin^2 2x = 0$$

После приведения подобных слагаемых получаем уравнение, сводящееся к квадратному уравнению.

$$\sin^2 2x - 8\sin 2x + 4 = 0$$

Данное уравнение приводится к квадратному с помощью замены переменной.

$$D_1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - ac$$

Пусть $\sin 2x = y$, тогда

$$y^2 - 8y + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$D_1 = 12$$

$$y_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

$\sin 2x = 4 - 2\sqrt{3}$ или $\sin 2x = 4 + 2\sqrt{3} > 1$

$$2x = (-1)^k \arcsin\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + \pi k, k \in \mathrm{Z}$$

$$x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathrm{Z}$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathrm{Z}$

Комментарий. Решение большого количества тригонометрических уравнений сводится к решению квадратных уравнений.

Пример 10. Решить уравнение $\sin \pi x^2 = \sin \pi\left(x^2 + 2x\right)$.

$$\sin \pi x^2 - \sin \pi\left(x^2 + 2x\right) = 0, x \in R$$

$$2\sin(-\pi x)\cos \pi\left(x^2 + x\right) = 0, x \in R$$

$2\sin(-\pi x) = 0$ или $\cos \pi\left(x^2 + x\right) = 0$

$$\pi x = \pi n, n \in \mathrm{Z}$$

$$x = n, n \in \mathrm{Z}$$

$$\pi\left(x^2 + x\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathrm{Z}$$

$$x^2 + x = \frac{1}{2} + k, k \in \mathrm{Z}$$

$$x^2 + x - \left(\frac{1}{2} + k\right) = 0, k \in \mathrm{Z}$$

$$D = 3 + 4k \geq 0$$

$k \geq -\frac{3}{4}$ $\quad k = 0,1,2,3....$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3 + 4k}}{2}, \ k = 0,1,2,3....$$

Ответ: $x = n, n \in Z; x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3+4k}}{2}, k = 0,1,2,3....$

Комментарий. Данный пример иллюстрирует возможность решения тригонометрических уравнений методом преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Пример 11. Решить уравнение

$$tg\left(x-15^0\right)ctg\left(1+15^0\right)=\frac{1}{3}.$$

Во-первых, найдем область определения функции, выходящей в данной тригонометрическое уравнение.

$$\begin{cases}\cos\left(x-15^0\right)\neq 0\\ \sin\left(x+15^0\right)\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-15^0\neq 90^0+180^0k, k\in Z\\ x+15^0\neq 180^0n, n\in Z\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\neq 15^0+90^0+180^0k, k\in Z\\ x\neq -15^0+180^0n, n\in Z\end{cases}$$

Таким образом областью определения данного уравнения является:

$$x\neq 15^0+90^0+180^0k, k\in Z$$

$$x\neq -15^0+180^0n, n\in Z$$

Во-вторых, решим данное уравнение. Для этого выполним следующие тождественные преобразования:

$$\frac{\sin\left(x-15^0\right)\cos\left(x+15^0\right)}{\sin\left(x+15^0\right)\cos\left(x-15^0\right)}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\sin\left(-30^0\right)+\sin 2x}{\sin 30^0+\sin 2x}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\sin 2x-\frac{1}{2}}{\sin 2x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{2\sin 2x-1}{2\sin 2x+1}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\sin 2x-3-2\sin 2x-1}{6\sin 2x+3}=0$$

$$\begin{cases}\sin 2x=1\\ \sin 2x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2x=1\\ \sin 2x\neq -\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$2x=90^0+360^0m, m\in Z$$

$$x=45^0+180^0m, m\in Z$$

Ответ: $x=45^0+180^0m, m\in Z$

Комментарий. Решение тригонометрических уравнений в ряде случаев проводится преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму.

Пример 12. Решить тригонометрическое уравнение

$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}$.

Решение:

Используем в процессе решения формулы понижения степени:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \sin 2x - \frac{1}{2}$$

$$\sin^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos^2 2x + \cos^2 2x = \sin 2x - \frac{1}{2}$$

$$2 + 2\cos^2 2x = 4\sin 2x - 2$$

$$\sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0$$

Выполним замену переменных, получим:

$\sin 2x = y$, $y^2 + 2y - 3 = 0$

$y_1 = 1$

$y_2 = -3$

$\sin 2x = 1$ или $\sin 2x = -3 < -1$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Комментарий. Решение тригонометрических уравнений с применением формул понижения степени.

Пример 13. Решить уравнение

$3\sin x + 4\cos x = 5.$

Решение:

$3\sin x + 4\cos x = 5, x \in Z$, $3\sin 2\frac{x}{2} + 4\cos 2\frac{x}{2} = 5 * 1$

Используем далее основное тригонометрическое тождество.

$$6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\cos^2\frac{x}{2} - 4\sin^2\frac{x}{2} = 5\sin^2\frac{x}{2} + 5\cos^2\frac{x}{2}$$

$$9\sin^2\frac{x}{2} - 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0$$

Если $\cos\frac{x}{2} = 0$, то и $\sin\frac{x}{2} = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству, значит $\cos\frac{x}{2} \neq 0$.

Разделим обе части на $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$, получим

$$9tg^2\frac{x}{2}-6tg\frac{x}{2}+1=0$$

$$\left(3tg\frac{x}{2}-1\right)^2=0$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2}=arctg\frac{1}{3}+\pi n, n\in Z$$

$$x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z$$

Ответ: $x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z$

Комментарий. Данный пример показывает возможность решения тригонометрических уравнений как однородных уравнений. Однородное уравнение – это уравнение, в котором каждое слагаемое имеет одну и туже степень:

$$a_0\sin^n x+a_1\sin^{n-1}x\cos x+a_2\sin^{n-2}x\cos^2 x+\ldots+$$
$$+a_{n-1}\sin x\cos^{n-1}x+a_n\cos^n x=0,$$

где $a_0;a_1;a_2;\ldots;a_n$ - действительные числа. n - показатель однородности.

Пример 14. Решить уравнение $3\sin x+4\cos x=5.$

Решение:

$3\sin x+4\cos x=5, x\in Z$

Т. к. $3^2+4^2\geq 5^2$, следовательно корни есть.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3^2+4^2}=5$, получим

$$\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x=1$$

Т. к. $\left|\frac{3}{5}\right|\leq 1, \left|\frac{4}{5}\right|\leq 1$ и $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, то существует такой угол φ, что $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, а $\sin\varphi=\frac{4}{5}$, тогда получим

$$\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=1$$

$$\sin(x+\varphi)=1$$

$$x+\varphi=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$$

$$x=-\varphi+\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$$

$$x=-\arcsin\frac{4}{5}+\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$$

Ответ: $x=-\arcsin\frac{4}{5}+\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$

Комментарий. Рассмотренный прием решения тригонометрических уравнений называется методом введения вспомогательного аргумента.

Данный метод основан на следующем. Рассмотрим уравнение особого вида:

$a\cos x + b\sin x = c$

Случай 1. Если $c = 0$, то уравнение однородное.

Случай 2. Если $c \neq 0$ и $a^2 + b^2 \neq 0$ (то есть хотя бы одно из чисел a или b не равно 0), то разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Т. к. $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1; \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$ и $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то существует такой угол φ, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, тогда

$$\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

а) если, $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$ т. е. $a^2 + b^2 < c^2$, то корней нет.

в) если, $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$ т. е. $a^2 + b^2 \ge c^2$, тогда

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k, k \in Z$$

$$x = -\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k, k \in Z$$

Пример 15. Решить уравнение

$3\sin x + 4\cos x = 6.$

Решение:

Проверим выполнение неравенства: $a^2 + b^2 < c^2$.

Очевидно, что $3^2 + 4^2 < 6^2$, следовательно, корней уравнение не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 16. Решить уравнение

$3\sin x + 4\cos x = 5, x \in Z.$

Выполним преобразование уравнения, используя формулы «универсальная тригонометрическая подстановка»:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$$

Получаем, что

$$3\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + 4\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 5$$

$$\frac{6tg\frac{x}{2}+4-4tg^2\frac{x}{2}-5-5tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=0$$

$$\begin{cases} 9tg^2\frac{x}{2}-6tg\frac{x}{2}+1=0 \\ 1+tg^2\frac{x}{2}\neq 0 \end{cases}$$

$$\left(3tg\frac{x}{2}-1\right)^2=0$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2}=arctg\frac{1}{3}+\pi n, n\in Z$$

$$x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z$$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2), могла произойти потеря корней, значит необходимо проверить, являются ли корни уравнения $\cos\frac{x}{2}=0$ корнями данного уравнения.

$$\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$$

$$x=\pi+2\pi n, n\in Z$$

Проверка.

Если $x=\pi+2\pi n, n\in Z$, тогда

$$3\sin(\pi+2\pi n)+4\cos(\pi+2\pi n)=5, x\in Z$$

$0+4(-1)=5$ - не верно, значит $x=\pi+2\pi n, n\in Z$, не является корнями исходного уравнения.

Ответ: $x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z.$

Комментарий. Данный пример показывает возможность решения тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки.

Пример 17. Решить уравнение

$$2(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1=0, x\in R.$$

Решение:

$$2(\sin x+\cos x)+2\sin x\cos x+1=0$$

Пусть

$$\sin x+\cos x=y\cdot$$

Далее возведем записанное равенство в квадрат и воспользуемся формулой «Квадрат суммы»:

$$(\sin x+\cos x)^2=y^2$$

$$1+2\sin x\cos x=y^2$$

$$2\sin x\cos x=y^2-1.$$

Получаем, что

$y^2+2y-1+1=0$

$y^2+2y=0$

$y(y+2)=0$

$y=0$ или $y=-2$

$\sin x+\cos x=0$ $\qquad$ $\sin x+\cos x=-2$

Разделим на $\cos x\neq 0$, получим

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2$

$tgx=-1$ $\qquad$ $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{2}{\sqrt{2}}$

$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$

Т. к. $\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leq 1$, при $x\in R$, то корней нет.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

Пример 18. Решить уравнение 2cos 2*x* – 4sin *x* + 1 = 0.

Решение:

Используем формулу: cos 2*x* = 1 – 2sin^2 *x* и сделаем замену *t* = sin *x*: 2(1 – 2t^2) – 4*t* + 1 = 0, 4t^2 + 4*t* – 3 = 0, t_1 = ½ , t_2 = $-\frac{3}{2}<-1-$ посторонний корень (учитываем, что $-1\leq t\leq 1$).

Выполним обратную замену: $\sin x=\frac{1}{2},\ \ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$.

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n.$

Пример 19. Решить уравнение 2cos^2 *x* + 4tg *x* + 3 = 0.

Решение:

Применим следствие из основного тождества: $\cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}$ и сделаем замену *t* = tg *x*:

$\frac{2}{1+t^2}+4t+3=0,\ 4t^3+3t^2+4t+5=0.$ Найдем подбором корень *t* = - 1 и разложим на множители левую часть полученного уравнения: (*t* + 1)(4t^2 – *t* + 5) = 0. Дискриминант второго множителя отрицателен, следовательно, других корней уравнение не имеет. Обратная замена: tg *x* = - 1, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n.$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n.$

Комментарий. Приведенные приемы решения тригонометрических уравнений основаны на использовании основного тождества и формул для косинуса двойного угла.

Пример 20. Решить уравнение 10 + sin 6*x* – 22cos^2 3*x* = 0.

Поскольку $10 = 10\sin^2 3x + 10\cos^2 3x$, а $\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$, уравнение можно записать в виде: $10\sin^2 3x + 2\sin 3x\cos 3x - 12\cos^2 3x = 0$. Перед нами так называемое однородное уравнение, для всех слагаемых левой части которого сумма степеней $\sin 3x$ и $\cos 3x$ одинакова.

Проверкой можно убедиться, что $\cos 3x \neq 0$ для корней этого уравнения, поэтому можно разделить обе его части на $2\cos 3x$: $5\mathrm{tg}^2\, 3x + \mathrm{tg}\, 3x - 6 = 0$. Сделаем замену: $t = \mathrm{tg}\, 3x$, тогда $5t^2 + t - 6 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{6}{5}$. Обратная замена:

$\mathrm{tg}\, x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$

$\mathrm{tg}\, x = -\frac{6}{5}$, $x = -arctg\frac{6}{5} + \pi n.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ -arctg\frac{6}{5} + \pi n.$

Пример 21. Решить уравнение *5sin 4x – 12cos 4x = 6,5.*

Решение:

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13.$

Разделим обе части уравнения на 13:

$\frac{5}{13}\sin 4x - \frac{12}{13}\cos 4x = \frac{1}{2}.$

Пусть $\alpha = \arcsin\frac{12}{13}$, тогда $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, и уравнение принимает вид: $\sin x\cos\alpha - \cos x\sin\alpha = \frac{1}{2}$, или $\sin(x - \alpha) = \frac{1}{2}$, откуда $x - \alpha = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = \arcsin\frac{12}{13} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n.$

Ответ: $\arcsin\frac{12}{13} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n.$

Пример 22. Решить уравнение *sin 4x + sin 3x + cos 6x + cos 7x = 0.*

Решение:

Преобразуем в произведение сумму синусов и сумму косинусов:

$\sin 4x + \sin 3x = 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}.$

$\cos 6x + \cos 7x = 2\cos\frac{13x}{2}\cos\frac{x}{2}.$

Теперь запишем левую часть уравнения в виде:

$2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos\frac{13x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$, $2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{7x}{2} + \cos\frac{13x}{2}\right) = 0.$ Это равенство возможно в двух случаях:

1 случай. $\cos\frac{x}{2} = 0$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pi + 2\pi n.$

2 случай. $\sin\frac{7x}{2} + \cos\frac{13x}{2} = 0.$ Применим формулу приведения: $\cos\frac{13x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{13x}{2}\right) = \sin\frac{\pi - 13x}{2}$. Тогда $\sin\frac{7x}{2} + \sin\frac{\pi - 13x}{2} = 0,$

$2\sin\frac{7x+\pi-13x}{4}\cos\frac{7x-\pi+13x}{4}=0,\ -2\sin\frac{6x-\pi}{4}\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$ Это уравнение вновь сводится к двум простейшим: $\sin\frac{6x-\pi}{4}=0\Rightarrow\frac{6x-\pi}{4}=\pi n,\ \ x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};$

$\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\ 5x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ x=\frac{3\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}.$

Ответ: $\pi+2\pi n,\ \ \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ \ \frac{3\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$.

Пример 23. Решить уравнение $5\sin x+2\cos x=\sqrt{29}\cos 3x.$

Решение:

Применим к левой части метод дополнительного угла: $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29},$

$\frac{5}{\sqrt{29}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{29}}\cos x=\cos 3x.$

Выберем дополнительный угол так, чтобы получить в левой части формулу для косинуса разности: $\alpha=\arcsin\frac{5}{\sqrt{29}};$

$\sin\alpha\sin x+\cos\alpha\cos x=\cos 3x,\ \ \cos(x-\alpha)-\cos 3x=0,\ -2\sin\frac{x-\alpha+3x}{2}\sin\frac{x-\alpha-3x}{2}=0,$

$2\sin\left(2x-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)=0.$

1 случай. $\sin\left(2x-\frac{\alpha}{2}\right)=0,\ 2x-\frac{\alpha}{2}=\pi n,\ \ x=\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi n}{2}=\frac{1}{4}\arcsin\frac{5}{\sqrt{29}}+\frac{\pi n}{2}$.

2 случай. $\sin\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)=0,\ \ x+\frac{\alpha}{2}=\pi n,\ \ x=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{\sqrt{29}}+\pi n.$

Ответ: $\frac{1}{4}\arcsin\frac{5}{\sqrt{29}}+\frac{\pi n}{2},\quad -\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{\sqrt{29}}+\pi n.$

Комментарий. Решение примера основано на формуле преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Пример 24. Решить уравнение cos 9x + sin 4x sin 5x = 0.

Решение.

Преобразуем произведение синусов в сумму: $\sin 4x\sin 5x=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 9x).$

Тогда $\cos 9x+\frac{1}{2}(\cos x-\cos 9x)=0,\ 2\cos 9x+\cos x-\cos 9x=0,\ \ \cos 9x+\cos x=0,$

2cos 5x cos 4x = 0.

1 случай. cos 5x = 0, $5x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}.$

2 случай. $\cos 4x=0,\ 4x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}.$

Ответ: $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ \ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}.$

Пример 25. Решить уравнение sin 6x + 3sin 4x cos 2x = 0.

Решение.

Преобразуем произведение в сумму: $\sin 6x + \frac{3}{2}(\sin 6x + \sin 2x) = 0,\ 5\sin 6x + 3\sin 2x = 0.$

Воспользуемся формулой синуса тройного угла: $\sin 6x = 3\sin 2x - 4\sin^3 2x$ и сделаем замену: $t = \sin 2x$. Решим уравнение для t: $15t - 20t^3 + 3t = 0$, $9t - 10t^3 = 0$, $t(9 - 10t^2) = 0$,

$t_1 = 0,\ t_2 = \frac{3}{\sqrt{10}},\ t_3 = -\frac{3}{\sqrt{10}}.$ Обратная замена приводит к трем простейшим уравнениям:

1 случай. $\sin 2x = 0,\ 2x = \pi n,\ x = \frac{\pi n}{2}.$

2 случай. $\sin 2x = \frac{3}{\sqrt{10}},\ x = (-1)^n \cdot \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{\pi n}{2}.$

3 случай. $\sin 2x = -\frac{3}{\sqrt{10}},\ x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{\pi n}{2}.$

Объединяя две последние группы корней, получим окончательный ответ.

Ответ: $\frac{\pi n}{2},\ \pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{\pi n}{2}.$

Комментарий. Рассмотренный пример иллюстрирует использование преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Пример 26. Решить уравнение $\sin 2x - 5 + 5\sin x - 5\cos x = 0$.

Решение.

Сделаем замену: $t = \sin x - \cos x$, тогда $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - \sin 2x$. Следовательно, $\sin 2x = 1 - t^2$.

Подставим эти выражения в уравнение:

$1 - t^2 - 5 + 5t = 0$, $t^2 - 5t + 4 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 4$. Очевидно, что разность синуса и косинуса не может равняться четырем, поскольку эти функции не принимают значений, модуль которых превышает 1; поэтому второй корень квадратного уравнения – посторонний. Для $t = 1$ сделаем обратную замену: $\sin x - \cos x = 1$. Применим метод дополнительного угла:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n.$

Пример 27. Решить уравнение $(\sin 2x - \cos 2x)^4 + \cos 8x = \frac{11}{4}$**.**

Решение.

Поскольку $(\sin 2x - \cos 2x)^2 = 1 - \sin 4x$, представим $(\sin 2x - \cos 2x)^4 = (1 - \sin 4x)^2$.

Кроме того, $\cos 8x = 1 - 2\sin^2 4x$. Эти преобразования позволяют сделать замену:

$t = \sin 4x$ и получить для t уравнение $(1-t)^2 + 1 - 2t^2 - \frac{11}{4} = 0,\ 4t^2 + 8t + 3 = 0,$

$t_1 = -\frac{1}{2},\ t_2 = -\frac{3}{2} < -1$ – посторонний корень. Сделаем обратную замену:

$\sin 4x = -\frac{1}{2},\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}.$

Ответ: $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi n}{4}$.

Комментарий. Данный пример предполагает использование тождеств $(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$.

Комментарий. Решение следующих четырех примеров основано на формулах понижения степени. Напомним, что четные степени синуса и косинуса можно понизить переходом к двойному углу с помощью следующих формул:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};$$

$$\cos^4 x-\sin^4 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=\cos 2x;$$

$$\cos^4 x+\sin^4 x=(\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)-2\sin^2 x\cos^2 x=$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2x)=\frac{1+\cos^2 2x}{2}=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3+\cos 4x}{4};$$

$$\cos^6 x+\sin^6 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^2 x)=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=$$

$$=\frac{1+3\cos^2 2x}{4}=\frac{5+3\cos 4x}{8};$$

$$\cos^6 x-\sin^6 x=(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)=\cos 2x\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)=$$

$$=\frac{\cos 2x(3+\cos^2 2x)}{4}.$$

Пример 28. Решить уравнение $\cos^2 8x + \cos^2 2x + 2\cos^2 5x = 2$.

Решение.

Понизим степени тригонометрических функций, входящих в уравнение:

$$\frac{1+\cos 16x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{2+2\cos 10x}{2}=2,\quad (\cos 16x+\cos 4x)+2\cos 10x=0,$$

$$2\cos 10x\cos 6x+2\cos 10x=0,\ 2\cos 10x(\cos 6x+1)=0.$$

$$\cos 10x=0,\quad x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{10}.$$

$$\cos 6x+1=0,\ \cos 6x=-1,\quad x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{\pi n}{10};\ \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3}$.

Пример 29. Решить уравнение $\sin^2 4x+\sin^2 8x=\dfrac{3}{2}$.

Решение.

При понижении степени первого слагаемого оно выразится через $\cos 8x$, поэтому у второго слагаемого мы не будем понижать степень, а вместо этого применим к нему основное тождество: $\dfrac{1-\cos 8x}{2}+1-\cos^2 8x=\dfrac{3}{2},\ t=\cos 8x,\ \dfrac{1-t}{2}+1-t^2=\dfrac{3}{2},$

$2t^2 + t = 0,\ t_1 = 0,\ t_2 = -\dfrac{1}{2}$.

$$\cos 8x=0,\quad x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{8}.$$

$\cos 8x = -\frac{1}{2}, \;\; x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}.$

Ответ: $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}; \; \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}.$

Пример 30. Решить уравнение $\cos^4 2x - \sin^4 2x = \sin x$.

Решение.

Преобразуем разность четвертых степеней: $\cos 4x = \sin x$ и применим формулу приведения: $\cos 4x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0, \; -2\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

$\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \;\; \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi n, \;\; x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}.$

$\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \;\; \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi n, \;\; x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}.$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \;\; \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}.$

Пример 31. Решить уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^2 2x + 1$.

Решение.

Выразим $\sin^6 x + \cos^6 x$ через $\sin^2 2x$: $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \sin^2 2x + 1, \;\; \sin 2x = 0, \;\; x = \frac{\pi n}{2}.$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}.$

Пример 32. Решить уравнение $\cos^4 x = 8\cos x \cos 3x - 7$.

Решение.

Понизим степень в левой части уравнения, а в правой преобразуем произведение в сумму:

$$\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = 4(\cos 4x + \cos 2x) - 7, \;\; \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = 4\left(2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x\right) - 7,$$

$t = \cos 2x: \;\; \frac{1 + 2t + t^2}{4} = 4(2t^2 - 1 + t) - 7, \;\; 31t^2 + 14t - 45 = 0, \;\; t_1 = 1, \;\; t_2 = -\frac{45}{31} < -1 -$ посторонний корень.

Обратная замена: $\cos 2x = 1, \;\; x = \pi n.$

Ответ: $\pi n.$

Пример 33. Решить уравнение $20\text{tg}\, 8x + 15\sin 8x + 2\text{tg}\, 4x = 0$.

Решение.

Используем универсальную подстановку:

$$\frac{40 tg 4x}{1 - tg^2 4x} + \frac{30 tg 4x}{1 + tg^2 4x} + 2tg 4x = 0, \;\; t = tg 4x, \;\; t\left(\frac{20}{1 - t^2} + \frac{15}{1 + t^2} + 1\right) = 0.$$

1 случай. $t = 0$, $\text{tg}\, 4x = 0$, $x = \frac{\pi n}{4}.$

2 случай. $\frac{20}{1 - t^2} + \frac{15}{1 + t^2} + 1 = 0, \;\; t^4 - 5t^2 - 36 = 0, \;\; \left(t^2\right)_1 = 9, \left(t^2\right)_2 = -4 < 0$ - постороннее решение.

Тогда $t=\pm 3,\ tg4x=\pm 3,\ x=\pm\frac{1}{4}arctg3+\frac{\pi n}{4}.$

Ответ: $\frac{\pi n}{4};\ \pm\frac{1}{4}arctg3+\frac{\pi n}{4}.$

Пример 34. Решить уравнение $\frac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\cos 6x.$

Решение.

Обратим внимание на то, что левую часть уравнения с помощью одной из формул универсальной подстановки можно представить как $\frac{1}{\cos 2x}$: $\frac{1}{\cos 2x}=\cos 6x,$

cos2x cos 6*x* = 1, $\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 4x)=1,\ 2\cos^2 4x-1+\cos 4x-2=0,\ t=\cos 4x:$

$2t^2+t-3=0$, $t_1=1$, $t_2=-1{,}5<-1$ – посторонний корень. Обратная замена:

cos 4*x* = 1, $x=\frac{\pi n}{2}.$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}.$

Комментарий. Уравнения, содержащие комбинации $\mathrm{tg}^n\, x \pm \mathrm{ctg}^n\, x$ удобно решать, переходя к синусам и косинусам.

Пример 35. Решить уравнение 8sin 2*x* **+** 3(tg *x* + ctg *x*) – 16 = 0.

Решение.

Преобразуем сумму тангенса и котангенса: $tgx+ctgx=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}$. Теперь можно сделать замену: *t* = sin2*x,*

$8t+\frac{6}{t}-16=0,\ 4t^2-8t+3=0,\ t_1=\frac{1}{2},\ t_2=\frac{3}{2}>1-$ посторонний корень.

Обратная замена: $\sin 2x=\frac{1}{2},\ \ x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}.$

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}.$

Пример 36. Решить уравнение $\mathrm{tg}^2\, x+\mathrm{ctg}^2\, x = 5\mathrm{ctg}\, 2x+11$.

Решение.

Вновь выразим левую часть равенства через функции двойного угла:

$$tg^2x+ctg^2x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)}{\sin^2 2x}=\frac{4}{\sin^2 2x}-2=$$

$=4(1+ctg^2 2x)-2=2+4ctg^2 2x.$ Теперь уравнение принимает вид:

$2+4ctg^2 2x=5ctg2x+11,\ t=ctg2x,\ 4t^2-5t-9=0,\ t_1=-1,\ t_2=\frac{9}{4}.$

1 случай. $ctg2x=-1,\ x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}.$

2 случай. $ctg2x=\frac{9}{4},\ x=\frac{1}{2}arcctg\frac{9}{4}+\frac{\pi n}{2}.$

Ответ: $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{1}{2}arcctg\frac{9}{4}+\frac{\pi n}{2}.$

Комментарий. При решении тригонометрических уравнений (группа С) используются те же приемы, что и при решении алгебраических иррациональных уравнений. Особое внимание требуется обращать на дополнительные ограничения на допустимые значения неизвестного (самая распространенная ошибка в задачах этого типа – включение в ответ посторонних корней).

Пример 37. Решить уравнение $\sqrt{\frac{16}{25}+\cos^2 2x}=\sin 2x-\frac{1}{5}.$

Решение.

ОДЗ задается неравенством: $\sin 2x-\frac{1}{5}\geq 0,\ \sin 2x\geq\frac{1}{5}.$ Возведем обе части в квадрат: $\frac{16}{25}+\cos^2 2x=\sin^2 2x-\frac{2}{5}\sin 2x+\frac{1}{25},\ \frac{16}{25}+1-\sin^2 2x=\sin^2 2x-\frac{2}{5}\sin 2x+\frac{1}{25}.$

Замена $t = \sin 2x$ $\left(\frac{1}{5}\leq t\leq 1\right)$ приводит к уравнению $\frac{16}{25}+1-t^2=t^2-\frac{2}{5}t+\frac{1}{25},$

$5t^2 - t - 4 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{4}{5}<\frac{1}{5}-$ посторонний корень. Обратная замена: $\sin 2x = 1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n.$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi n.$

Пример 38. Решить уравнение $\sqrt{1+\sin 6x}=3-2(\sin 3x+\cos 3x).$

Решение.

Обратим внимание на то, что подкоренное выражение представляет собой полный квадрат: $1 + \sin 6x = (\sin 3x + \cos 3x)^2$, следовательно, $\sqrt{1+\sin 6x}=|\sin 3x+\cos 3x|.$

Сделаем замену: $t = \sin 3x + \cos 3x$, тогда $|t| = 3 - 2t$.

1 случай. $\begin{cases} t\geq 0 \\ t=3-2t \end{cases}\Rightarrow t=1.$

2 случай. $\begin{cases} t<0 \\ -t=3-2t \end{cases}\Rightarrow t=3$ - посторонний корень (не соответствует условию раскрытия модуля).

Итак, $\sin 3x+\cos 3x=1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$

$x=-\frac{\pi}{12}+(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}.$

Ответ: $-\frac{\pi}{12}+(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}.$

Пример 39. Решить уравнение $(\cos 2x+7\cos x-3)\sqrt{tgx+\frac{1}{99}}=0.$

Решение.

Ограничение на ОДЗ: $\operatorname{tg} x+\frac{1}{99}\geq 0,$ то есть $\operatorname{tg} x\geq -\frac{1}{99}$. Учитывая это условие, приравняем каждый множитель к нулю.

1 случай. $\cos 2x + 7\cos x - 3 = 0$, $2\cos^2 x - 1 + 7\cos x - 3 = 0$, $t = \cos x$, $2t^2 + 7t - 4 = 0$, $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -4 < -1 -$ посторонний корень. Следовательно, $\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ tgx \geq -\frac{1}{99} \end{cases}$. Этим условиям удовлетворяют углы вида $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ (вторая группа решений тригонометрического уравнения: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ определяет углы, лежащие в четвертой четверти, тангенс которых равен $-\sqrt{3} < -\frac{1}{99}$).

2 случай. $tgx + \frac{1}{99} = 0,\ tgx = -\frac{1}{99},\ x = -arctg\frac{1}{99} + \pi n.$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ -arctg\frac{1}{99} + \pi n.$

Комментарий. Для решения тригонометрических уравнений с модулями применяются те же приемы, что и для алгебраических уравнений с модулями.

Пример 40. Решить уравнение $\sin 3x + |\sin x| = 0$.
Решение.
Во-первых, $\sin x \geq 0$, $\sin 3x + \sin x = 0$, $2\sin 2x \cos x = 0$, $4\sin x \cos^2 x=0$.
1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$.
2) $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$
Во-вторых, $\sin x < 0$, $\sin 3x - \sin x = 0$, $2\sin x \cos 2x = 0$, $2\sin x\,(1 - 2\sin^2 x) = 0$.
1) $\sin x = 0$ – не соответствует условию раскрытия модуля.
2) $\begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = 0 \\ \sin x < 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n.$
Ответ: $\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n.$

Пример 41. Решить уравнение $|\sin 12x| + |\sin 18x| = 0$.
Решение.
Сумма модулей может равняться нулю только в том случае, если при одном и том же значении x оба подмодульных выражения равны нулю. Следовательно, нужно найти общие корни двух уравнений: $\begin{cases} \sin 12x = 0 \\ \sin 18x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{12} \\ x = \frac{\pi k}{18} \end{cases} \quad (n, k \in Z).$

Принципиально важно то, что в решениях указаны разные целочисленные параметры. Для общих корней должно выполняться равенство $\frac{\pi n}{12} = \frac{\pi k}{18}$, откуда $n = \frac{2k}{3}$.

Поскольку n – целое число, дробь $\frac{2k}{3}$ должна быть сократимой, а это возможно только если k кратно трем, то есть $k = 3m$, $m \in Z$. Тогда решение уравнения можно записать так:

$x = \frac{\pi \cdot 3m}{18} = \frac{\pi m}{6}.$

Ответ: $\frac{\pi m}{6}.$

Комментарий. Рассмотрим далее тригонометрические уравнения с конечным числом корней. Эти уравнения очень необычны, и конечное число решений связано с тем, что аргумент тригонометрической функции принимает значения из некоторого конечного промежутка.

Пример 42. Решить уравнение $\sin\frac{5}{25x^2+1} = 0.$

Решение.

Найдем множество значений функции $f(x) = \frac{5}{25x^2+1}.$ Очевидно, что $f(x) > 0.$ Исследуем ее на экстремум. $f'(x) = -\frac{250x}{(25x^2+1)} = 0$ при $x = 0$ – найдена критическая точка.

Слева от нее $f'(x) > 0,$ справа $f'(x) < 0,$ то есть это точка максимума. Так как он является единственным экстремумом, то при $x = 0$ функция принимает свое наибольшее значение: $f(0) = 5$.

Следовательно, $0 < \frac{5}{25x^2+1} \le 5.$

Решим простейшее тригонометрическое уравнение: $\frac{5}{25x^2+1} = \pi n.$ Из предыдущего исследования получаем, что равенство возможно только при условии $0 < \pi n \le 5,$ откуда $\begin{cases} 0 < n \le \frac{5}{\pi} \\ n \in Z \end{cases} \Rightarrow n = 1.$

Действительно, это единственное целочисленное решение такого неравенства. Тогда $\frac{5}{25x^2+1} = \pi,\ \ x^2 = \frac{5-\pi}{25\pi},\ \ x = \pm\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5-\pi}{\pi}}.$

Ответ: $\pm\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5-\pi}{\pi}}$.

Комментарий. В следующем примере рассмотрим комбинированные задачи, в которых применяются известные из алгебры методы решения систем и способы решения тригонометрических уравнений. Важно помнить, что при решении системы ответ каждого простейшего уравнения должен записываться с новым целочисленным параметром, который может принимать любое возможное значение независимо от ранее введенных параметров.

Пример 43. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4} \\ \cos x \sin y = \frac{1}{4} \end{cases}.$

Решение.

Применим метод алгебраического сложения: перейдем к системе, уравнениями которой будут сумма и разность исходных уравнений.

$$\begin{cases}\sin x\cos y+\cos x\sin y=\dfrac{1}{2}\\ \sin x\cos y-\cos x\sin y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin(x+y)=\dfrac{1}{2}\\ \sin(x-y)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n\\ x-y=\pi k\end{cases}\quad(n,k\in Z).$$

Вновь сложим и вычтем полученные уравнения:

$$\begin{cases}2x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi(n+k)\\ 2y=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi(n-k)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}(n+k)\\ y=(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}(n-k)\end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases}x=(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}(n+k)\\ y=(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}(n-k)\end{cases}.$

Пример 44. Решить систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{4}{\sin^2 2x}-\dfrac{3}{\sin^2 2y}=2\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$**.**

Решение.

Используем подстановку из второго уравнения: $\begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}-x\\ \dfrac{4}{\sin^2 2x}-\dfrac{3}{\sin^2(\pi-2x)}=2\end{cases}.$

Применим формулу приведения: $\dfrac{4}{\sin^2 2x}-\dfrac{3}{\sin^2 2x}=2,\ \dfrac{1}{\sin^2 2x}=2,\ \sin^2 2x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1-\cos 4x}{2}=\dfrac{1}{2},$

$\cos 4x = 0$, $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4},\ \ y=\dfrac{\pi}{2}-x=\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{\pi n}{4}.$

Ответ: $\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}\\ y=\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{\pi n}{4}\end{cases}.$

Пример 45. Решить систему уравнений $\begin{cases}\cos^2 4x+\cos^2 2y=1\\ \cos^2 4x+\cos^2 4y=1\end{cases}.$

Решение.

Вычтем первое уравнение из второго и применим формулу $\cos^2 2y=\dfrac{1+\cos 4y}{2}$:

$$\cos^2 4y-\frac{1+\cos 4y}{2}=0,\ \ t=\cos 4y:\ \ t^2-\frac{1+t}{2}=0,\ 2t^2-t-1=0,\ t_1=1,\ t_2=-\frac{1}{2}.$$

1 случай. $\cos 4y = 1$, тогда из второго уравнения $\cos^2 4x = 0$, то есть $\cos 4x = 0$. Получена система двух простейших уравнений: $\begin{cases}\cos 4x=0\\ \cos 4y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}\\ y=\dfrac{\pi k}{2}\end{cases}\quad(n,k\in Z).$

2 случай. $\cos 4y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 4x = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1+\cos 8x}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos 8x = \frac{1}{2}$. Решая полученную систему простейших уравнений, находим вторую группу корней:

$$\begin{cases} \cos 8x = \frac{1}{2} \\ \cos 4y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4} \\ y = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}.$$

Еще раз напомним, что решение каждого уравнения системы содержит свой целочисленный параметр (решением будет каждая пара чисел, заданная полученными формулами, в которых мы можем задавать *n* и *k* любые целые значения, не обязательно одинаковые).

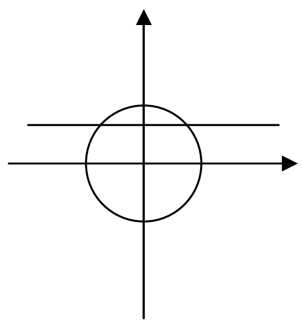
Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \\ y = \frac{\pi k}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4} \\ y = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}$.

Комментарий. Решением тригонометрического неравенства обычно является набор промежутков, границы которых можно задать общей формулой с использованием целочисленного параметра. Для определения границ очень удобно применять тригонометрическую окружность.

Пример 46. Решить неравенство $\sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) \le \frac{1}{2}$.

Решение.

Решим сначала простейшее тригонометрическое неравенство $\sin t \le \frac{1}{2}$, где $t = 3x - \frac{\pi}{5}$.



Прямая $y = \frac{1}{2}$ делит тригонометрическую окружность на две дуги. Решениям неравенства соответствуют точки на нижней дуге, ординаты которых не больше ½ . Поэтому в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{2}$ решение имеет вид: $\frac{5\pi}{6} \le t \le \frac{13\pi}{6}$. Границы следующего промежутка решений можно получить отсюда, изменив каждую границу на $2\pi n$:

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le t \le \frac{13\pi}{6} + 2\pi n$. Сделав обратную замену, получим двойное неравенство для *x*:

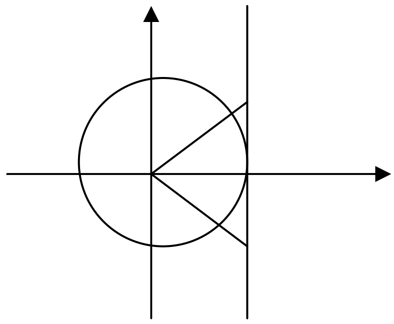
$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le 3x - \frac{\pi}{5} \le \frac{13\pi}{6} + 2\pi n, \quad \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{5} + 2\pi n \le 3x \le \frac{13\pi}{6} + \frac{\pi}{5} + 2\pi n,$$

$\frac{31\pi}{90}+\frac{2\pi n}{3}\le x\le\frac{71\pi}{90}+\frac{2\pi n}{3}.$

Ответ: $\frac{31\pi}{90}+\frac{2\pi n}{3}\le x\le\frac{71\pi}{90}+\frac{2\pi n}{3}.$

Пример 47. Решить неравенство | tg *x* | ≥ 1.

Решение.



Наименьший положительный период тангенса равен *π*, поэтому достаточно найти решение неравенства на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а затем прибавить к границам *πn*. Раскрыв модуль, превратим неравенство в совокупность двух неравенств: $\left[\begin{array}{l} tgx\ge 1\\ tgx\le -1\end{array}\right.$.

Дуги окружности, соответствующие их решениям, имеют вид: $\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

Обращаем внимание на то, что точки $\pm\frac{\pi}{2}$ не входят в решение, поскольку при этих значениях аргумента тангенс не существует. Учитывая периодичность, находим окончательное решение: $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\le-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\le x<\frac{\pi}{2}+\pi n.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\le-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\le x<\frac{\pi}{2}+\pi n.$

Комментарий. В более сложных неравенствах для их сведения к простейшим применяются в основном те же приемы, что и при решении уравнений.

Пример 48. Решить неравенство $\cos 2x-(2+\sqrt{2})\sin x-1-\sqrt{2}\le 0.$

Решение.

Представим cos 2*x* = 1 – 2sin^2 *x* и сделаем замену: *t* = sin *x*. Тогда для *t* требуется решить систему неравенств $\left\{\begin{array}{c} -1\le t\le 1\\ 2t^2+(2+\sqrt{2})t+\sqrt{2}\ge 0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} -1\le t\le 1\\ \left[\begin{array}{l} t\le -1\\ t\ge-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.\Rightarrow t=-1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\le t\le 1.$

Обратная замена приводит к уравнению sin *x* = -1, откуда $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,$ и неравенству $\sin x\ge-\frac{\sqrt{2}}{2},$ решение которого: $-\frac{\pi}{4}+2\pi n\le x\le\frac{5\pi}{4}+2\pi n.$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+2\pi n\le x\le\frac{5\pi}{4}+2\pi n.$

Пример 49. Решить неравенство 2sin^3 2*x* + 3sin 2*x* ≤ tg *x* + ctg *x*.

Решение.

Используем то, что tg *x* + ctg *x* = $\dfrac{2}{\sin 2x}$ (см. занятие 9), и сделаем замену: *t* = sin 2*x*. Неравенство для *t* имеет вид: $2t^3+3t\le\dfrac{2}{t},\ \dfrac{2t^4+3t^2-2}{t}\le 0,\ \dfrac{(t^2+2)(2t^2-1)}{t}\le 0.$ Методом интервалов находим решение: $t\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0<t\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ Проводим обратную замену и решаем полученные тригонометрические неравенства:

1 случай. $\sin 2x\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{5\pi}{4}+2\pi n\le 2x\le\dfrac{7\pi}{4}+2\pi n,\ \dfrac{5\pi}{8}+\pi n\le x\le\dfrac{7\pi}{8}+\pi n.$

2 случай. $0<\sin 2x\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}2\pi n<2x\le\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\le 2x<\pi+2\pi n\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\pi n<x\le\dfrac{\pi}{8}+\pi n\\ \dfrac{3\pi}{8}+\pi n\le x<\dfrac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right..$

Ответом будет объединение полученных промежутков.

Ответ: $\left(\pi n;\dfrac{\pi}{8}+\pi n\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{8}+\pi n\right)\cup\left[\dfrac{5\pi}{8}+\pi n;\dfrac{7\pi}{8}+\pi n\right].$

Пример 50. Решить неравенство $\dfrac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}\ge 7-6\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 2x}-1}.$

Решение.

Преобразуем обе части неравенства:

1 случай. $\dfrac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}=\dfrac{2\sin^2 2x}{2\cos^2 2x}=tg^2 2x=|tg 2x|^2;$

2 случай. $\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 2x}-1}=\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 2x}{\cos^2 2x}}=\sqrt{\dfrac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}}=|tg 2x|.$

Сделаем замену: *t* = | tg 2*x* |: $\begin{cases}t\ge 0\\ t^2\ge 7-6t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\ge 0\\ t^2+6t-7\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}t\ge 1\\ t\le -7\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow t\ge 1.$

Следовательно, | tg 2*x* | ≥ 1, откуда (см. пример 2) $-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}<x\le-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}\le x<\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}.$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}<x\le-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}\le x<\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}.$

Пример 51. Решить неравенство $|\sin x|+|\cos x|<\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}.$

Решение.

Поскольку обе части неравенства неотрицательны, можно возвести их в квадрат:

$\sin^2 x + 2|\sin x \cos x| + \cos^2 x < \frac{2+\sqrt{3}}{2}$, или $|\sin 2x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Еще раз возведем обе части в квадрат: $\sin^2 2x < \frac{3}{4}$, $\frac{1-\cos 4x}{2} < \frac{3}{4}$, $\cos 4x > -\frac{1}{2}$. Получено простейшее тригонометрическое неравенство, решение которого: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 4x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$,

$-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$.