71 Тест по теме Тригонометрические уравнения и неравенства

Решить уравнения:

Задание 1. $(\cos 2x+1)\left(\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\right)=0$; *Ответ:* $x=\frac{\pi}{2}n, n\in Z$

Комментарий. Решение этого уравнения, понятно, сводится к решению совокупности уравнений:

$\cos 2x=-1$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{1}{2}$, решением первого уравнения является семейство $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$; второго - $x=\frac{\pi}{2}n, n\in Z$.

Значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ содержатся в каждом из семейств, т.е. являются повторяющимися. Чтобы в записи ответа не было повторяющихся значений x, целесообразно не включать в ответ первое семейство.

Вообще объединение семейств в тех случаях, когда это, возможно, не является обязательным. Но желательно для более компактной записи ответа. Что, конечно, учитывается при проверке экзаменационной работы.

Задание 2. $tgx\sin 2x=0$; *Ответ:* $x=\frac{\pi}{n}, n\in Z$.

Задание 3. $\frac{\sin^3 2x-\sin 2x}{\cos 3x}=0$; *Ответ:* $x=\pi n, x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k;\ k,n\in Z$.

Задание 4. $5\sin^2 x+3\sin x\cos x-3\cos^2 x=2$; *Ответ:* $x=arctg\frac{-3\pm\sqrt{69}}{6}+\pi n, n\in Z$

Комментарий. Это уравнение приводится к виду $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ - однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Для этого используется основное тригонометрическое тождество.

Задание 5. $6\cos^2 x+5\sin^2 x=5-\sqrt{3}\sin x\cos x$; *Ответ:* $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, x=-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ k,n\in Z$.

Задание 6. $\sin x+7\cos x=5$; *Ответ:* $x=2arctg\frac{1}{2}+2\pi n, x=-2arctg\frac{1}{3}+2\pi k;\ k,n\in Z$

Комментарий. Используйте подстановку $y=tg\frac{x}{2}$. Если $x\neq\pi+2\pi n, n\in Z$, то

$$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \sin x=\frac{2tg\frac{1}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

Эта подстановка позволяет быстро свести к рациональному любое уравнение вида $R(\cos x;\sin x)=0$. Поэтому её называют универсальной тригонометрической подстановкой. Но, следует помнить, что универсальная тригонометрическая подстановка используется при ограничении $x\neq\pi+2\pi n, n\in Z$, что может привести к потере корней.

Следует выяснить, не являются ли числа вида $x=\pi+2\pi n, n\in Z$ корнями исходного уравнения.).

Задание 7. $5\sin x - 12\cos x = -13\sin x$.

Ответ: $x = \frac{1}{4}\arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi}{2}n, x = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k, n \in Z$

Комментарий. Примените метод введения вспомогательного аргумента, основанный на том, что

$$a\sin x \pm b\cos x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \cos\varphi\sin x \pm \sin\varphi\cos x = \sin(x \pm \varphi),$$

где $\varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$).

Решить уравнение при всех значениях параметра a.

Задание 8. $\sin(a + x) + \sin x = \cos\frac{a}{2}$;

Ответ: $x \in R$, если $a = \pi + 2\pi k$, $x = -\frac{a}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, если $a \neq \pi + 2\pi k; k \in Z$.

Задание 9. $tgx + tga + 1 = tgxtga$.

Ответ: $x \in \varnothing$, если $a = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\frac{3\pi}{4} + \pi(k - n), x = -a - \frac{\pi}{4} + \pi m$, если $a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $a \neq -\frac{3\pi}{4} + \pi(k - n); k, n, m \in Z$.

Решить уравнения:

Задание 10. $\frac{\sin 2^x}{\sin 2^{x-2}\cos 2^{x-2}} = 2\sqrt{3}$;

Ответ: $\log_2(\frac{\pi}{3} + 4\pi k)$, где $k = 0,1,2,...$, $\log(-\frac{\pi}{3} + 4\pi n)$, где $n = 1,2,3,...$.

Задание 11. $\sin(\pi\lg x) + \cos(\pi\lg x) = 1$;

Ответ: $10^{2k+\frac{1}{2}}, 10^{2n}$.

Задание 12. $\log_{\sin x}(\sin x - \frac{1}{4}\cos x) = 3$;

Ответ: $\frac{\pi}{12} + 2\pi k, \frac{11\pi}{12} + 2\pi n$.

Задание 13. $\log_{\sin 3x}(\cos x - \cos 2x) = 1$;

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

Задание 14. $\left|\log_{\frac{1}{3}}(1 + \sin 2x)\right| + \left|\log_{\frac{1}{3}}(1 - \sin 2x)\right| = 1$;

Ответ: $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k$.

Задание 15. $\left|\log_3(1 + \cos 2x)\right| + \left|\log_3(1 - \cos 2x)\right| = 1$;

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$.

Задание 16. $\sqrt{tgx + \sin x} + \sqrt{tgx - \sin x} = 2\sqrt{tgx\cos x}$;

Ответ: $\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi n$.

Задание 17. $2\cos 2x + 3\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x - 3 = 0$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$

Задание 18. $\mathrm{ctg}^2\, 4x - 5\mathrm{ctg}\, 4x = -\frac{2}{\sin^2 4x}$

Ответ: $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4};\ \frac{1}{4} arctg \frac{3}{2} + \frac{\pi n}{4}$

Задание 19. $\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{\cos^2 x} = 4$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$

Задание 20. $\frac{2}{1-\cos x} + \frac{2}{1+\cos x} = \sin^2 x + 3$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$

Задание 21. $3\sin^2 3x - 3\sin 3x\cos 3x - 4\cos^2 3x = 1$

Ответ: $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3};\ \frac{1}{3} arctg \frac{5}{2} + \frac{\pi n}{3}$

Задание 22. $2 - 5\sin 8x + 6\sin^2 4x = 0$

Ответ: $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4};\ \frac{1}{4} arctg \frac{1}{4} + \frac{\pi n}{4}$

Задание 23. $12\cos 2x + 5\cos x = 12\sin x + 5\sin 2x$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ -2arctg \frac{17}{7} + 2\pi n$

Задание 24. $\sin 2x + \sin 6x + \sin 3x - \sin x = 0$

Ответ: $\frac{2\pi n}{5};\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$

Задание 25. $\sin 6x - \sin 4x + \cos 8x + \cos 2x = 0$

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5};\ \frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$

Задание 26. $5\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{26}\cos 4x$

Ответ: $-\frac{1}{2} arctg 5 + \pi n;\ \frac{1}{6} arctg 5 + \frac{\pi n}{6}$

Задание 27. $4\cos x = \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\, x + 1$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$

Задание 28. $\cos 8x - \cos 3x \cos 5x = 0$

Ответ: $\frac{\pi n}{5};\ \frac{\pi n}{3}$

Задание 29. $\sin 3x \sin 2x + \cos 9x \cos 4x = 0$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6};\ \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$

Задание 30. $\mathrm{tg}\, 3x + \mathrm{ctg}\, 3x = 4\sin 2x$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$

Задание 31. $\sin 6x + 1 + \sin 3x - \cos 3x = 0$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$

Задание 32. $tg^3 x + ctg^3 x = \frac{ctg 2x + 11}{\sin 2x}$

Ответ: $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2};\ \frac{1}{2} arctg \frac{9}{8} + \frac{\pi n}{2}$

Задание 33. 9(tg *x* + ctg *x*) = 16sin^3 2*x* + 12sin 2*x*

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$

Задание 34. $\left(\frac{tg^2 x + 1}{1 - tg^2 x}\right)^2 + 6tg 2x + 4 = 0$

Ответ: $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2};\ -\frac{1}{2} arctg 5 + \frac{\pi n}{2}$

Задание 35. $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x + \frac{3}{2}\sin 2x = 0$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$

Задание 36. cos^4 7*x* – sin^4 7*x* = sin *x*

Ответ: $-\frac{\pi}{26} + \frac{2\pi n}{13};\ \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{15}$

Задание 37. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{4} - \sin 2x$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$

Задание 38. $\sin^6 x - \cos^6 x = -\frac{3\cos 2x}{4}$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$

Задание 39. 4cos^2 *x* = 24cos *x* cos 3*x* + 3

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$

Задание 40. sin^4 *x* + 2cos^4 *x* = cos 4*x*

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$

Задание 41. $\sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x} + \sin x - \cos x = 0$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi n$

Задание 42. $\sqrt{tg^2 x + 1} = 6 - \frac{2}{\cos x}$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$

Задание 43. $(\cos 2x + 3\cos x - 1)\sqrt{\sin x + \frac{1}{100}} = 0$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{100} + \pi n$

Задание 44. | sin *x* | = sin *x* + 2cos *x*

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \pi n$

Задание 45. | sin 10 *x* | + | sin 4*x* | = 0

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$

Задание 46. $\sin\sqrt{\pi x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}(2 \pm \sqrt{3})$

Задание 47. $\sin\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{6 \pm \sqrt{36-\pi^2}}{\pi}$

Задание 48. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n+k) \\ y = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n-k) \end{cases}$

Задание 49. $\begin{cases} x + y = -\frac{\pi}{6} \\ \sin 2x + \sin 2y = 5 - 4\cos^2(x-y) \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + \pi n \\ y = -\frac{7\pi}{12} - \pi n \end{cases}$

Задание 50. $\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \\ y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \end{cases}$

Решить неравенство:

Задание 51. $\left|\cos 2x + \frac{3}{4}\right| < \frac{1}{4}$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n\right)$

Задание 52. $\cos 2x - (2+\sqrt{3})\cos x + 1 + \sqrt{3} \geq 0$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right], x = 2\pi n$

Задание 53. $|\sin x| + |\cos x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right)$

Задание 54. $9\sqrt{1-\cos 12x} > 4\cos^4 3x + 4\sin^4 3x + 2$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{6}\right)$

Задание 55. tg x – tg^2 x <0

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$

Задание 56. sin^2 x – 2sin x cos x + cos^2 x ≥ 0

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\frac{\pi}{4}+\pi n\right]\cup\left[arctg3+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$

Задание 57. 1 + sin 2x > sin x – cos x

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;2\pi n\right)$

Задание 58. 4sin^2 x + 4cos^2 x ≤ 2 – cos 4x

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}\right]$

Задание 59. $\left|\sin 5x-\frac{1}{4}\right|\geq\frac{3}{4}$

Ответ: $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},\ \left[\frac{7\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5};\frac{11\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5}\right]$

Задание 60. 2sin^3 2x + 7sin 2x ≤ 2(tg x + ctg x)

Ответ: $\left(2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup\left[\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right]$