74 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Комментарий. Сущность процесса решения уравнений можно описать следующим образом: исходное уравнение упрощается посредством определенных преобразований, т.е. выстраивается цепочка от исходного к некоторому итоговому уравнению, решение которого очевидно или способ (алгоритм) решения которого хорошо известен. При этом возможны три типа преобразований; три принципиально разные ситуации:

1. *применяемые в процессе решения преобразования таковы, что множества корней исходного и итогового уравнений совпадают*; в этом случае исходное и итоговое уравнения называют равносильными; соответствующие преобразования также, называют равносильными;

2. *применяемые в процессе решения преобразования таковы, что множество корней итогового уравнения «шире»,* чем множество корней исходного уравнения; в этом случае говорит, что в процессе решения применены неравносильные преобразования, которые могли привести к появлению посторонних корней;

3. *применяемые в процессе решения преобразования таковы, что множество корней итогового уравнения «уже»*, чем множество корней исходного уравнения; в этом случае говорят, что в процессе решения применены неравносильные преобразования, которые могли привести к потере корней;

Проиллюстрируем сказанное примерами.

Пример 1. а) Дано уравнение $\frac{5x+1}{x^4-16}=\frac{3}{x^3+4x-(x^2+4)}$.

Перепишем уравнение, разложив на множители знаменатели: $\frac{5x+1}{(x^2-4)(x^2+4)}=\frac{3}{(x-1)(x^2+4)}$.

Умножим обе части уравнения на выражение x^2+4; это равносильное преобразование, т.к. $x^2+4\neq 0$ при любом значении x: $\frac{5x+1}{(x^2-4)}=\frac{3}{(x-1)}$.

б) Дано уравнение $|x-5|=x-5.$ Возведем обе его части в квадрат: $|x-5|^2=(x-5)^2$. Так как $x-y^2+1\geq 1+x+y^2$, то получаем $(x-5)^2=(x-5)^2$. Множество корней этого уравнения – все действительные числа. При этом простая проверка показывает, что отрицательное число не может быть корнем исходного уравнения. Таким образом, в процессе решения были применены неравносильные преобразования и появились посторонние корни. Действительно, возведение обоих частей уравнения в четную степень является равносильным преобразованием только в том случае, если обе части уравнения неотрицательны.

в) Дано уравнение $x^2-2x-3=4x+5+x^2$.

Перепишем уравнение, разложив квадратные трехчлены на множители:

$(x+1)(x-3)=(5-x)(x+1)$. Разделим обе части уравнения на выражение $x+1$: $x-3=5-x$.

Последнее уравнение имеет единственный корень x=4, в то время как исходное уравнение имеет два корня: $x_1=4$ и $x_2=-1$. Таким образом, в процессе решения уравнения было применено неравносильное преобразование, которое привело к потере корней. Действительно, проводя деление на выражение $x+1$, мы не потребовали, чтобы $x+1\neq 0$.

Как видно из примеров неравносильные преобразования могут стать причиной неверного решения уравнения, привести к ошибке. Так может быть запретить неравносильные преобразования?! Можно запретить. Это один из возможных подходов. Он снимает проблему посторонних и потерянных корней, но приводит, как правило, к некоторому техническому усложнению процесса решения уравнения: появляются смешанные системы (уравнение и неравенство) и совокупности таких систем.

Так уравнение $|x-5|=x-5$ из примера **1б** равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-5|^2=(x-5)^2,\\ x-5\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}|x-5|=x-5,\\ x-5<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Уравнение x^2-$2x$-3=$4x$+5-x^2 из примера **1в** равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3=5-x,\\ x+1\neq 0\end{cases}\\ x+1=0.\end{array}\right.$

Рассмотренные совокупности решаются просто, но в более сложных случаях обязательное соблюдение условия равносильности преобразований может привести к серьёзным техническим трудностям, сделать решение слишком ветвящимся и громоздким. Поэтому, не будем строго запрещать применение любых неравносильных преобразований. Все ли они одинаково опасны? Понятно, что более опасны неравносильные преобразования, приводящие к потере корней. В примере 1в нам удалось легко понять причину потери корня и исправиться, но в большинстве случаев потерянные корни отыскать весьма трудно (заметим, также, что малоопытный решающий, а абитуриент часто именно таков, может вовсе не заметить факта потери корня и не будет пытаться его отыскать, хотя это, может быть, и получилось бы).

Итак, на не равносильные преобразования, приводящие к потере корней, мы накладываем строгий и категорический запрет. При решении уравнений, таким образом, мы не будем применять деление обеих частей уравнения на выражение, обращающееся в ноль в области определения уравнения, и не будем применять преобразования, приводящие к сужению области определения уравнения.

Что же касается, неравносильных преобразований, приводящих к появлению посторонних корней, то такие преобразования вполне допустимы. Но при этом, обязательным заключительным этапом решения должна быть проверка всех найденных в итоге корней. Заметим, что тактика проверки зависит непосредственно от класса уравнений (рациональные, иррациональные, логарифмические и т.д.), ибо в каждом случае свои причины появления посторонних корней. В этой связи, тактика проверки конечно должна быть гибкой, но можно пользоваться и универсальным приемом: подстановка всех корней итогового уравнения в исходное с последующим вычислением или «прикидкой».

Пример №2. Решим уравнение $\sqrt{4x+9}-\sqrt{11x+1}-\sqrt{7x+4}=0.$

Комментарий. При решении этого уравнения будем придерживаться стратегии, допускающей неравносильные преобразования при обязательной проверке корней. Решая уравнения вида, $\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}\pm\sqrt{h(x)}=0$ следует перед возведением в квадрат уединить один из корней, перенеся его в правую часть уравнения. Уединить можно любой из корней, и в большинстве случаев, все равно какой. Но иногда уединение определенного корня приводит к более простому решению, чем уединение других. Поэтому всегда следует анализировать ситуацию в указанном аспекте.

Решение.

В нашем уравнение сумма коэффициентов при *x* в первом и третьем подкоренных выражениях равна коэффициенту при *x* во втором подкоренном выражении. Поэтому уединить целесообразно именно корень $\sqrt{11x+1}$. Полученное после возведения в квадрат уравнение будет содержать *x* только под корнем. Если бы мы уединяли любой из других корней, то после возведения в квадрат получали бы уравнения, содержащие *x* и под корнем, и вне корня, что менее удобно для последующего решения.

Итак, имеем: $\sqrt{4x+9}-\sqrt{7x+4}=\sqrt{11x+1}$,

$$4x+9-2\sqrt{(4x+9)(7x+4)}+7x+4=11x+1,$$

$$\sqrt{28x^2+79x+36}=6,$$

$$28x^2+79x+36=36,$$

$$28x^2+79x=0,$$

$$x_1=-2\frac{23}{28},\ x_2=0.$$

Комментарий. При решении иррационального уравнения мы осуществляем так называемую рационализацию уравнения, т.е. избавляемся от радикалов (корней). Но, избавляясь от корней, мы избавляемся и от ограничений на подкоренные выражения: $\sqrt[2n]{f(x)}, f(x)\ge 0.$ Иными словами происходит расширение области определения уравнения. Это причина появления посторонних корней. Поэтому все корни итогового уравнения, полученного в ходе решение, следует проверить на принадлежность области определения исходного уравнения. В нашем случае область определения исходного уравнения задается системой $\begin{cases}4x+9\ge 0,\\ 7x+4\ge 0,\\ 11x+1\ge 0.\end{cases}$

Решив эту систему, получаем область определения уравнения: $\left[-\frac{1}{11},+\infty\right)$. Очевидно, что $x_1=-2\frac{23}{28}$ - посторонний корень, появившийся в процессе решения из-за применения неравносильных преобразований, приведших к расширению области определения уравнения, а $x_2=0$ – принадлежит области определения уравнения и является его корнем (что легко проверить непосредственной подстановкой).

Ответ: x=0.

Комментарий. Но единственная ли причина появления посторонних корней при решении иррациональных уравнений с радикалами четной степени – расширение области определения исходного уравнения? Не кроется ли в возведении обеих частей уравнения в четную степень ещё одна, менее очевидная, но не менее опасная в смысле ошибки, причина появления посторонних корней?

Пример 3. а) Решим уравнение $2\sqrt{8-x}=x-5.$

При решении этого уравнения будем придерживаться стратегии, допускающей неравносильные преобразования, т.е. возведем обе части уравнения в квадрат, решим полученное рациональное уравнение и сделаем проверку корней.

Итак, $4(8-x)=(x-5)^2$, $32-4x=x^2-10x+25$, $x^2-6x-7=0$, $x_1=-1$, $x_2=7$.

Проверим, удовлетворяют ли эти корни исходному уравнению. Пусть $x=-1$, тогда левая часть исходного уравнения равна -6. Таким образом, $x=-1$ - посторонний для исходного уравнения корень, появившийся в процессе решения из-за применения неравносильных преобразований. Пусть теперь, $x=7$. Тогда исходное уравнение превращается в верное числовое равенство. Исходное уравнение, таким образом, имеет единственный корень $x=7$.

б) Решим теперь уравнение $2\sqrt{8-x}=5-x$ (его чрезвычайно, малое отличие от предыдущего уравнения очевидно).

Поступая также как в случае а), получаем:

$$4(8-x)=(5-x)^2,$$
$$32-4x=25-10x+x^2,$$
$$x^2-6x-7=0,$$
$$x_1=-1, x_2=7.$$

Итоговое уравнение имеет такие же корни, что и уравнение из случая а). Проверим их подстановкой в исходное уравнение $2\sqrt{8-x}=5-x$. Пусть $x=-1$, тогда исходное уравнение превращается в верное числовое равенство. Пусть, далее, $x=7$. Тогда левая часть исходного уравнения равна -2. Таким образом, $x=7$ – посторонний для исходного уравнения корень.

В процессе решения следствием уравнений **а)**, **б)** является одно и тоже уравнение $x^2-6x-7=0,$ имеющее два корня: $x_1=-1$ и $x_2=7$. Корень $x_1=-1$ – есть корень уравнения б), но посторонний для уравнения а); корень $x_2=7$ – наоборот, корень уравнения **а)**, посторонний для уравнения **б)**.

В каждом из случаев а) и б) корни оказавшиеся посторонними принадлежат области определения данного уравнения. Значит расширение области определения исходного уравнения – не единственная причина появления посторонних корней. В чем же дело? Заметим, что и в случае а), и в случае б) при подстановке в исходное уравнение корень, оказывающийся посторонним, приводит к ситуации: левая и правая части уравнения равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Это не случайно. Уравнение $f^2(x)=g^2(x)$ является следствием не только уравнения $f(x)=g(x)$, но и следствием уравнения $f(x)=-g(x)$. Какие следует сделать из этого выводы?

Во-первых, поскольку появление посторонних корней при решении иррациональных уравнений, содержащих радикалы четной степени может быть и не связано с областью определения исходного уравнения, то и проверка корней не может осуществляться только по области определения, или условиям её задающим.

Во-вторых, проверка корней иррационального уравнения, должна учитывать обе причины появления посторонних корней; универсальный прием, как уже говорилось, состоит в непосредственной подстановке в исходное уравнение, но могут быть реализованы и другие подходы:

а) сначала отсечь те корни, которые не принадлежат области определения исходного уравнения, а оставшиеся проверить непосредственной подстановкой во все уравнения левая и правая части которых возводились в квадрат в процессе решения,

б) опять же исключить все корни, не принадлежащие области определения, а затем проанализировать все случаи возведения в квадрат обеих частей уравнения, выделить те случаи, где было нарушено условие равносильности:

$$f^2(x)=g^2(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0.\end{cases}$$

Далее только в эти уравнения подставить корни итогового уравнения, принадлежащие области определения исходного уравнения.

в) если решать иррациональные уравнения, применяя только равносильные преобразования, то в каждом случае возведения в квадрат следует предусматривать условие равносильности, сформулированное выше, и изначально следует зафиксировать условия, задающие область определения исходного уравнения.

Рассмотрим **схемы равносильных преобразований для иррациональных уравнений основных видов**.

I. $$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g^2(x),\\ g(x)\ge 0,\\ f(x)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g^2(x),\\ g(x)\ge 0.\end{cases}$$

II. $$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ g(x)\ge 0,\\ f(x)\ge 0.\end{cases}$$ или $$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)\ge 0.\end{cases}$$ или

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ g(x)\ge 0,\end{cases}$$

III. $$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=h(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)+2\sqrt{f(x)g(x)}+g(x)=h^2(x),\\ g(x)\ge 0,\\ f(x)\ge 0,\\ h(x)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4f(x)g(x)=(h^2(x)-f(x)-g(x))^2,\\ h^2(x)-f(x)-g(x)\ge 0,\\ h(x)\ge 0,\\ f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0.\end{cases}$$

IV. $$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=h(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)-2\sqrt{f(x)g(x)}+g(x)=h^2(x),\\ \sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\ge 0,\\ h(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0,\\ f(x)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4f(x)g(x)=(f(x)+g(x)-h^2(x))^2,\\ f(x)+g(x)-h^2(x)\ge 0,\\ f(x)\ge g(x),\\ h(x)\ge 0,\\ f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0.\end{cases}$$

V. $$f(x)\sqrt{g(x)}=h(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f^2(x)g(x)=h^2(x),\\ f(x)\ge 0,\\ h(x)\ge 0\end{cases}$$

VI. $$f(x)\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f^2(x)g(x)=h(x),\\ f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0,\\ h(x)\ge 0.\end{cases}$$

Заметим, что важно конечно не выучить наизусть эти схемы, а понять их, уметь самостоятельно составлять схемы равносильности для других случаев.

Не надо думать, что в процессе решения иррационального уравнения обязательно появляются посторонние корни. Рассмотрим пример.

Пример 4. Решим уравнение $\sqrt{1+3x}=x+1.$

Решение.

Возведя обе части уравнения в квадрат, получаем $1+3x=x^2+2x+1$, т.е. уравнение $x^2-x=0$. Его корни $x_1=0$ и $x_2=1$. Подставляя каждый из найденных корней в исходное уравнение, убеждаемся, что оба они являются его корнями.

Пример 5. Решим уравнение $\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}=1.$

Решение.

Уединим радикалы: $\sqrt{x-1}=1+\sqrt{3-x}.$ Возведем обе части уравнения в квадрат (дважды):

$$\begin{aligned}&x-1=1+2\sqrt{3-x}+3-x,\\&2x-5=2\sqrt{3-x},\\&4x^2-20x+25=4(3-x),\\&4x^2-16x+13=0.\end{aligned}$$

Корни последнего уравнения: $x_1=\frac{4+\sqrt{3}}{2}, x_2=\frac{4-\sqrt{3}}{2}.$

Далее следует провести проверку корней. Область определения исходного уравнения задается условиями $\begin{cases}x-1\ge 0,\\3-x\ge 0,\end{cases}$ т.е. $1\le x\le 3.$ Как нетрудно проверить, полагая $\sqrt{3}$ приближенно равным *1,7*, что оба корня x_1 и x_2 принадлежат области определения исходного уравнения. Значит, если среди x_1 и x_2 есть посторонний корень, то причина его появления связана с нарушением условия равносильного возведения обеих частей уравнения в квадрат. Ясно, также, что первое из проделанных в данном решении возведений в квадрат – равносильное преобразование, поэтому если и появились посторонние корни, то при возведении в квадрат обеих частей уравнения $2x-5=2\sqrt{3-x}.$ Непосредственной подстановкой именно в это уравнение проверим наши корни x_1 и x_2.

Итак, пусть $x=\frac{4+\sqrt{3}}{2}$, тогда $2\cdot\frac{4+\sqrt{3}}{2}-5=2\sqrt{3-\frac{4+\sqrt{3}}{2}}$, $4+\sqrt{3}-5=2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$, ($\sqrt{3}-1)^2=4\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2}$, $3-2\sqrt{3}+1=2\cdot(2-\sqrt{3})$, $4-2\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}.$

Мы пришли к верному числовому равенству. Значит $x=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$ - корень данного уравнения.

Пусть теперь $x=\frac{4-\sqrt{3}}{2}.$ Тогда $2\cdot\frac{4-\sqrt{3}}{2}-5=2\sqrt{3-\frac{4-\sqrt{3}}{2}},$

$4-\sqrt{3}-5=2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$, $-(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}.$ Ясно, что левая часть уравнения отрицательна, а правая положительна. Поэтому $x=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$ - посторонний корень.

Пример 6. Решим уравнение $\sqrt{11x+3}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{2-x}-\sqrt{x-2}=0.$

Распределим радикалы следующим образом: $\sqrt{11x+3}+\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}.$

Возведем обе части уравнения в квадрат и приведем подобные слагаемые:

$$11x+3+2\sqrt{(11x+3)(2-x)}+2-x=9x+7+2\sqrt{(9x+7)(x-2)}+x-2,$$

$$10x+5+2\sqrt{(11x+3)(2-x)}=10x+5+2\sqrt{(9x+7)(x-2)},$$

$$\sqrt{(11x+3)(2-x)}=\sqrt{(9x+7)(x-2)}.$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$(11x+3)(2-x)=(9x+7)(x-2),$$

$$-11x^2+19x+6=9x^2-11x-14,$$

$$20x^2-30x-20=0,$$

$$2x^2-3x-2=0,$$

$$x_1=-0{,}5, x_2=2.$$

Проведем проверку корней. Сразу замечаем, что корень $\sqrt{x-2}$ не имеет смысла при $x=-0{,}5.$ Поэтому единственный возможный корень исходного уравнения – это *x=2*, удовлетворяющий всем условиям области определения. Поскольку, возводя обе части уравнения в квадрат, мы всякий раз соблюдали условие равносильности, то *x=2* – единственный корень исходного уравнения.

Пример 7. Решим уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}$.

При решении этого уравнения покажем применение метода введения новой переменной при решении иррациональных уравнений.

Возведем обе части уравнения в квадрат: $\frac{1}{x^2(1-x^2)}+\frac{2}{x\sqrt{1-x^2}}=\left(\frac{35}{12}\right)^2$.

Пусть теперь $\frac{2}{x\sqrt{1-x^2}}=t$, тогда уравнение можно переписать в виде: $t^2+2t-\left(\frac{35}{12}\right)^2=0$.

Это уравнение имеет два корня: $t_1=-\frac{49}{12}$, $t_2=\frac{25}{12}$. Таким образом, следствием исходного уравнения является совокупность систем:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12},\\ \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}=-\frac{49}{12},\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12},\\ \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{25}{12}\end{cases}.$$

Решим первую систему совокупности. Обозначим: $\frac{1}{x}=y$ и $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=z$. Тогда имеем

$\begin{cases}y+z=\frac{35}{12}\\ yz=-\frac{49}{12}\end{cases}$, т.е. $\begin{cases}y=\frac{5}{3},\\ z=\frac{5}{4}\end{cases}$, или $\begin{cases}y=\frac{5}{4},\\ z=\frac{5}{3}.\end{cases}$

Таким образом, $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{3}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{5}{4}, \end{cases}$ или $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{4}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$

Корни этой совокупности систем: $x_1=\dfrac{3}{5}$ и $x_2=\dfrac{4}{5}$.

Аналогично, решая вторую систему исходной совокупности, получаем $x_3 = -\dfrac{5+\sqrt{73}}{14}$.

Пример 8. Решим уравнение: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x-1.$

Подкоренные выражения $x+2\sqrt{x-1}$ и $x-2\sqrt{x-1}$ представляют из себя полные квадраты:

$$x+2\sqrt{x-1} = x-1+2\sqrt{x-1}+1 = (\sqrt{x-1}+1)^2,$$
$$x-2\sqrt{x-1} = x-1-2\sqrt{x-1}+1 = (\sqrt{x-1}-1)^2.$$

Тогда

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = x-1,$$
$$\left|\sqrt{x-1}+1\right| + \left|\sqrt{x-1}-1\right| = x-1,$$
$$\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right| = x-1.$$

Пусть $\sqrt{x-1} = y$, тогда уравнение можно переписать в виде:

$$y+1+|y-1| = y^2,$$
$$y^2 - y - 1 = |y-1|.$$

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат, затем воспользуемся тождеством $|f(x)|^2 = f^2(x)$ и формулой разности квадратов:

$$\left(y^2-y-1\right)^2 = |y-1|^2,$$
$$\left(y^2-y-1\right)^2 = (y-1)^2,$$
$$\left(y^2-y-1\right)^2 - (y-1)^2 = 0,$$
$$\left(y^2-y-1-y+1\right)\left(y^2-y-1+y-1\right) = 0,$$
$$\left(y^2-2y\right)\left(y^2-1\right) = 0,$$
$$y_1 = 0,\ y_2 = 2,\ y_{3,4} = \pm 1.$$

Если *y=0*, то $\sqrt{x-1}=0$, т.е. *x=1*. Если *y=2*, то $\sqrt{x-1}=2$, т.е. *x=5*. Если *y=1*, то $\sqrt{x-1}=1$, т.е. *x=2*. Если *y=-1*, то уравнение $\sqrt{x-1}=y$ не имеет корней.

Непосредственной подстановкой в исходное уравнение всех найденных значений *x*, приходим к выводу, что только *x=5* является корнем данного уравнения.

Рассмотрим, далее, примеры решения иррациональных уравнений с корнями степени, большей, чем вторая.

Пример 9. Решим уравнение $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0.$

Перераспределим радикалы $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = -\sqrt[3]{x+3}.$

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$\left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2}\right)^3 = -(x+3),$$
$$x+1+3\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{x+2} + 3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{(x+2)^3} + x+2 = -(x+3),$$

$$3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x+2}(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2})=-3x-6,$$
$$\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x+2}(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2})=-x-2.$$

Выражение в скобках, очевидно, есть – $\sqrt[3]{x+3}$, т.е.

$$-\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{x+3}=-x-2,$$
$$\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{x+3}=x+2,$$

Снова возведем обе части уравнения в третью степень:

$$(x+1)(x+2)(x+3)=(x+2)^3.$$

Далее имеем:

$$(x+1)(x+2)(x+3)-(x+2)^3=0,$$
$$(x+2)((x+1)(x+3)-(x+2))=0,$$
$$(x+2)(x^2+3x+1)=0,$$
$$x_1=-2, x_{2,3}=0{,}5(-3\pm\sqrt{5}).$$

В процессе решения, был применен прием, связанный с заменой суммы $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}$ на выражение -$\sqrt[3]{x+3}$, что могло привести к появлению посторонних корней (такой вывод позволяет сделать определенная искусственность этого приема). Поэтому проверим все найденные корни непосредственной подстановкой в исходное уравнение.

Если *x=-2*, то исходное уравнение обращается в верное числовое равенство.

Для подстановки значений $0{,}5(-3\pm\sqrt{5})$ возьмем приближенное значение: $\sqrt{5}\approx 2{,}2.$ Тогда $0{,}5(-3+\sqrt{5})\approx -0{,}4$ и $0{,}5(-3-\sqrt{5})\approx -2{,}6$.

Если *x=-0,4*, то

$$\sqrt[3]{-0{,}4+1}+\sqrt[3]{-0{,}4+2}+\sqrt[3]{-0{,}4+3}=0,$$
$$\sqrt[3]{0{,}6}+\sqrt[3]{1{,}6}+\sqrt[3]{2{,}6}=0.$$

Ясно, что это числовое равенство неверно, поскольку все три значения корней положительны, а сумма положительных чисел не может быть равна 0.

Если *x=-2,6*, то

$$\sqrt[3]{-2{,}6+1}+\sqrt[3]{-2{,}6+2}+\sqrt[3]{-2{,}6+3}=0,$$
$$\sqrt[3]{-1{,}6}+\sqrt[3]{-0{,}6}+\sqrt[3]{0{,}4}=0.$$

Ясно, что эта сумма не может быть равна 0, т.к. уже $\left|\sqrt[3]{-1{,}6}\right|>\left|\sqrt[3]{0{,}4}\right|$. Заметим, что довольно часто, «прикидка» при проверки корней позволяет сделать необходимый вывод на определенном промежуточном этапе вычислений, и доводить их до явного числового равенства или неравенства совсем не обязательно. (Это снова к вопросу о гибкой тактике проверки корней.)

Таким образом, *x= -2* – единственный корень данного уравнения.

Ответ: -2.

Комментарий. Запишем в общем виде прием решения, рассмотренный в этом примере:

$$\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{h(x)},$$
$$f(x)\pm 3\sqrt[3]{f^2(x)}\sqrt[3]{g(x)}+3\sqrt[3]{f(x)}\sqrt[3]{g^2(x)}\pm g(x)=h(x),$$
$$\pm 3\sqrt[3]{f^2(x)}\sqrt[3]{g(x)}(\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)})=h(x)-f(x)\mp g(x),$$
$$\pm 3\sqrt[3]{f^2(x)}\sqrt[3]{g(x)}\sqrt[3]{h(x)}=h(x)-f(x)\mp g(x),$$
$$\pm 27f(x)g(x)h(x)=(h(x)-f(x)\mp g(x))^3.$$

По аналогичной схеме решаются уравнения вида $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = h(x)$.

Большие трудности у абитуриентов вызывают иррациональные уравнения, содержащие радикалы разных степеней. Рассмотрим примеры.

Пример 10. а) Решим уравнение $\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{3x+2}$.

Это уравнение легко рационализируется возведением обеих его частей в шестую степень:

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^6,$$
$$(x+2)^3 = (3x+2)^2,$$
$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 9x^2 + 12x + 4,$$
$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0.$$

И далее:

$$x^3 - 2x^2 - x^2 + 4 = 0,$$
$$x^2(x-2) - (x-2)(x+2) = 0,$$
$$(x-2)(x^2 - x - 2) = 0,$$
$$x_1 = 2, x_2 = -1.$$

Подстановкой выясняем, что только x=2 является корнем данного уравнения.

б) Решим уравнение $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}.$

В этом случае возведение обеих частей уравнения в шестую степень уже нецелесообразно. Проведем замену переменных.

Пусть $\sqrt[3]{2-x} = a$ и $\sqrt{x-1} = b,$ тогда *a+b=1*. Возведем в куб первое уравнение системы $\begin{cases} \sqrt{2-x} = a, \\ \sqrt{x-1} = b \end{cases}$,и в квадрат второе уравнение этой системы; затем почлено сложим полученные уравнения. В итоге получаем: $a^3+b^2=1$.

Таким образом, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a^3 + b^2 = 1. \end{cases}$$

Решая ее, получаем: $a_1 = 0, b_1 = 1; a_2 = -2, b_2 = 3; a_3 = 1, b_3 = 0,$ т.е. совокупность систем:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 0, \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = -2, \\ \sqrt{x-1} = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 1, \\ \sqrt{x-1} = 0. \end{cases}.$$

В итоге: $x_1 = 2, x_2 = 10, x_3 = 1.$ Непосредственная подстановка в исходное уравнение показывает, что среди этих корней нет посторонних.

Комментарий. Заметим, что описанный в случае б) прием является достаточно распространенным. Рассмотрим его применение при решении уравнений с радикалами высших степеней.

Пример 11. Решим уравнение: $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{6-x} = \sqrt{2}.$

Пусть $\sqrt[4]{x-2} = a,\ \sqrt[4]{6-x} = b.$ Тогда *a+b*=$\sqrt{2}$. Возведем в четвертую степень обе части каждого из уравнений системы $\begin{cases} \sqrt[4]{x-2} = a, \\ \sqrt[4]{6-x} = b \end{cases}$, и почленно сложим полученные уравнения. В итоге получаем $a^4 + b^4 = 4.$

Таким образом, имеем систему уравнений: $\begin{cases} a+b=\sqrt{2}, \\ a^4+b^4=4. \end{cases}$ Это симметрическая система уравнений, стандартно решающаяся заменой переменных *a+b=y* и *ab=z*.

Имеем корни*:* $a_1=0,\ b_1=\sqrt{2}$ *b* $a_2=\sqrt{2}$*,* $b_2=0$*.* Отсюда $x_1=2,\ x_2=6$. Проверка показывает, что это действительно корни данного уравнения.

Ответ: $x_1=2,\ x_2=6$*.*

Пример 12. Решим уравнение: $\sqrt[5]{33-x}+\sqrt[5]{x}=3.$

Аналогично предыдущему примеру получаем симметрическую систему относительно переменных $a=\sqrt[5]{33-x}$ и $b=\sqrt[5]{x}$: $\begin{cases} a+b=3, \\ a^5+b^5=33. \end{cases}$

Корни этой системы легко угадываются: $a_1=2, b_1=1; a_2=1, b_2=2.$ Далее получаем корни исходного уравнения: $x_1=1$ и $x_2=32$.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=32$.

Комментарий. Рассмотрим далее несколько примеров решения иррациональных неравенств. Все они, как мы уже обсуждали, решаются применением исключительно равносильных преобразований. Поэтому приведем схемы основных равносильных переходов ($n\in N$):

I. $\sqrt[2n]{f(x)}>\sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)\ge 0 \end{cases};$

II. $\sqrt[2n+1]{f(x)}>\sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x);$

III. $\sqrt[2n]{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g^{2n}(x), \\ f(x)\ge 0, \\ g(x)>0 \end{cases};$

IV. $\sqrt[2n+1]{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow f(x)<g^{2n+1}(x).$

V. $\sqrt[2n]{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)>g^{2n}(x) \end{cases}; \begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\ge 0. \end{cases};$

VI. $\sqrt[2n+1]{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow f(x)>g^{2n+1}(x);$

VII. $\sqrt{f(x)}>\sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f^3(x)>g^2(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$

Комментарий. Представленные схемы принципиально не изменяются, если исходно рассматривать нестрогие неравенства.

Пример 13. Решим неравенство: $\sqrt{(x-3)x+1)}>9(x+1)^2.$

Решение.

Применим схему V:

$$\sqrt{(x-3)x+1)}>9(x+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-3)(x+1)>9(x+1)^2, \\ x+1\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1<0, \\ (x-3)(x+1)\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+1)^2(x+\frac{3}{2})<0, \\ x+1\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1<0, \\ (x-3)(x+1)\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x<-1.$$

Таким образом, решение неравенства: $(-\infty,-1).$

Ответ: $(-\infty,-1)$.

Пример 14. Решим неравенство: $\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x.$

Решение.

Применим схему III:

$$\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x \Leftrightarrow \begin{cases}(X+2)(x-5)<(8-x)^2,\\(x+2)(x-5)\ge 0,\\8-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}13x-74<0,\\(x+2)(x-5)\ge 0,\\x-8<0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x<\dfrac{74}{13},\\ \left[\begin{array}{l}x\le -2,\\x\ge 5,\end{array}\right.\\x<8\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le 2,\\5\le x<\dfrac{74}{13}\end{array}\right.\cdot$$

Таким образом, решение неравенства: $(-\infty,2]\cup\left[5,\dfrac{74}{13}\right)$.

Ответ: $(-\infty,2]\cup\left[5,\dfrac{74}{13}\right)$.

Пример 15. Решим неравенство: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}-\sqrt{4x+5}<0.$

Решение.

Перераспределим радикалы: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}<\sqrt{4x+5}$ и, воспользовавшись в качестве принципиального ориентира схемой I, получаем:

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}<\sqrt{4x+5} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+1+x-4+2\sqrt{3x+1}\sqrt{x-4}<4x+5,\\3x+1\ge 0,\\x-4\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{3x+1}\sqrt{x-4}<4,\\3x+1\ge 0,\\x-4\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(3x+1)(x-4)<16,\\3x+1\ge 0,\\x-4\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-11x-20<0,\\3x+1\ge 0,\\x-4\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-5)(x+\dfrac{4}{3})<0,\\3x+1\ge 0,\\x-4\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow 4\le x<5.$$

Таким образом, решение неравенства: $[4,5)$.

Ответ: $[4,5)$.

Пример 16. Решим неравенство: $\dfrac{6x}{x-2}-\sqrt{\dfrac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}>0.$

Решение.

Преобразуем первую дробь и будем решать неравенство, применяя метод введения новой переменной:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{12x}{x-2}-\sqrt{\frac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}=y\\ \frac{1}{2}y^4-y^2-2y>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}=y\\ y(y^3-8-2y+4)>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}=y\\ y(y-2(y^2+2y+2)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}=y\\ y(y-2)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}=y,\\ \left[\begin{array}{l}y<0,\\ y<2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}<0\\ \sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}>2\end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}>2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{12x}{x-2}>16\\ \frac{12x}{x-2}>0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{12x}{x-2}-16>0 \Leftrightarrow \frac{x-8}{x-2}<0 \Leftrightarrow 2<x<8.$$

Таким образом, решение неравенства: (2,8).

Ответ: (2,8).

Пример 17. Решим неравенство: $\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geq 2.$

На этом примере мы также как и в предыдущем случае посмотрим особенности применения метода введения новой переменной при решении иррациональных неравенств.

Пусть $\sqrt{2-x}=t$, тогда $x=2-t^2$. Таким образом:

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2-x}=t\\ \frac{t+4(2-t^2)-3}{2-t^2}\geq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2-x}=t,\\ \frac{2t^2-t-1}{t^2-2}\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2-x}=t,\\ \frac{(t+\frac{1}{2})(t-1)}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2-x}=t,\\ \left[\begin{array}{l}t<-\sqrt{2},\\ -\frac{1}{2}\leq t\leq 1,\\ t<\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2-x}<-\sqrt{2},\\ -\frac{1}{2}<\sqrt{2-x}\leq 1,\\ \sqrt{2-x}>\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\leq\sqrt{2-x}\leq 1,\\ \sqrt{2-x}>\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\leq 2-x\leq 1,\\ 2-x>2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1\leq x\leq 2,\\ x<0.\end{array}\right.$$

Итак, решение неравенства: $(-\infty,0)\cup[1,2]$.

Ответ: $(-\infty,0)\cup[1,2]$.

Комментарий. Можно было решить это неравенство и без применения метода введения новой переменной, рассмотрев отдельно (в совокупности) случаи, задаваемые условиями *x>0* и *x<0*. Приводим запись такого решения:

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ \sqrt{2-x}+4x-3\ge 2x,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \sqrt{2-x}+4x-3\le 2x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ \sqrt{2-x}\ge 3-2x,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \sqrt{2-x}\le 3-2x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ 3-2x<0,\\ 2-x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ 3-2x\ge 0,\\ 2-x\ge (3-2x)^2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ 3-2x\ge 0,\\ 2-x\ge 0,\\ 2-x\le (3-2x)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x\le 2,\\ x>\dfrac{3}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}0<x\le \dfrac{3}{2},\\ 4x^2-11x+7\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ 4x^2-11x+7\ge 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{3}{2}<x\le 2,\\ 1\le x\le \dfrac{3}{2},\\ x<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1\le x\le 2,\\ x<0\end{array}\right..$$

Результат, естественно не зависит от способа решения: $(-\infty,0)\cup[1,2]$.

В заключение, рассмотрим пример решения иррационального неравенства с двумя переменными (группа С).

Пример 18. Решим неравенство $x+y^2+\sqrt{x-y^2-1}\le 1$.

Решение.

Пусть $x+y^2=a, x-y^2=b$, тогда неравенство можно записать в виде: $\sqrt{b-1}\le 1-a$.

По известной нам схеме это неравенство равносильно системе $\begin{cases}b-1\le (1-a)^2,\\ b-1\ge 0,\\ 1-a\ge 0.\end{cases}$

Итак, условия $b\ge 1, a\le 1$ должны выполняться одновременно, т.е. должна выполняться система $\begin{cases}x-y^2\ge 1,\\ 1\ge x+y^2.\end{cases}$

Из неё следует, что, $x-y^2+1\ge 1+x+y^2$, т.е. $-y^2\ge y^2$. Это означает, что $y=0$.

Подставим найденное значение в исходное неравенство; получим неравенство, $x+\sqrt{x-1}\le 1$, из которого следует, что $x=1$.

Таким образом, решение данного неравенства: $x=1, y=0$.

Ответ: $x=1, y=0$.