74 ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Комментарий. Для выполнения заданий этой группы требуется хорошо знать свойства логарифмов и уметь их применять. Эта работа очень полезна для подготовки к решению логарифмических и показательных уравнений и неравенств. Рассмотрим далее задания, связанные с упрощением показательных и логарифмических выражений.

Формулы для справок

Вспомним основные свойства логарифмов.

1. $\log_a 1 = 0$

Комментарий. Логарифм единицы по любому основанию равен нулю. Для того, чтобы убедиться в истинности данной формулы, достаточно вспомнить, что любое число (кроме нуля) в нулевой степени равно единице.

2. $\log_a a = 1$.

Комментарий. Логарифм равен единице в случае равенства чисел (выражений) – основания логарифма и выражения, стоящего под логарифмом.

3. $a^{\log_a b} = b$

Комментарий. Представленная формула является одним из вариантов записи определения логарифма.

4. $\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|$

5. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$

6. $\log_a \left(b^p\right) = p \cdot \log_a |b|$

7. $\log_{(a^p)} b = \dfrac{1}{p} \log_{|a|} b$

8. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$; $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$; $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

Комментарий.

Данная формула называемая формулой перехода к новому основанию, имеет два важных следствия. Приравняем в формуле $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $c = b$, тогда $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a}$. Рассмотрим числитель полученной дроби. Поставим вопрос: в какую степень следует возвести число *b*, чтобы получить число *b*. Ответ – в первую степень, т.е. числитель рассматриваемой дроби равен единице. Таким образом, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$. В ряде задач полезно бывает полученную формулу записать в преобразованном виде: $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

9. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Комментарий. Предполагается, что во всех представленных формулах параметры принимают допустимые значения.

Пример 1. Вычислить $5^{\log_3 90}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\log_3 10}$.

Решение.

Представим $\frac{1}{5}$ в виде степени числа 5, тогда $5^{\log_3 90}\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 10} = 5^{\log_3 90}\left(5^{-1}\right)^{\log_3 10}$.

Далее воспользуемся правилом умножения степеней одинаковым основанием (при умножении степеней с одинаковым основанием показатели складываются):

$$5^{\log_3 90}\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 10} = 5^{\log_3 90 - \log_3 10}$$

Преобразуем полученную в процессе решения разность логарифмов (по одному основанию) и применим определение логарифма (зададим вопрос «В какую степень следует возвести основание логарифма 3, чтобы получить число, стоящее под логарифмом – 9?»):

$$5^{\log_3 90}\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 10} = 5^{\log_3 90 - \log_3 10} = 5^{\log_3 9} = 5^2 = 25.$$

Ответ: 25.

Пример 2. Упростить выражение $\sqrt{343^{\frac{2}{3\log_{27} 7}}}$.

Решение.

Упростим показатель степени подкоренного выражения: $\frac{2}{3\log_{27} 7} = \frac{2}{3\log_{3^3} 27} = \frac{2}{3\cdot\frac{1}{3}\log_3 7} = 2\cdot\frac{1}{\log_3 7} = 2\log_7 3.$ Тогда $\sqrt{343^{\frac{2}{3\log_{27} 7}}} = \sqrt{\left(7^3\right)^{2\log_7 3}} =$

$$= \sqrt{\left(7^{\log_7 3}\right)^6} = \sqrt{3^6} = 3^3 = 27.$$

Ответ: 27.

Пример 3. Упростить выражение $\log_{\frac{1}{25}} \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{(9+2\sqrt{14})(\sqrt{7}-\sqrt{2})}$.

Решение.

Вначале упростим логарифмируемое выражение. Если вы уже занимались упрощением алгебраических выражений, то вид первого множителя в знаменателе вызовет предположение, что перед нами полный квадрат. Действительно, $9+2\sqrt{14} = 7+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}+2 = (\sqrt{7}+\sqrt{2})^2$. Тогда

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{(9+2\sqrt{14})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \frac{1}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \frac{1}{7-2} = \frac{1}{5}.$$

Следовательно, $\log_{\frac{1}{25}} \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{(9+2\sqrt{14})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \log_{5^{-2}}(5^{-1}) = -\frac{1}{2}\cdot(-1)\log_5 5 = \frac{1}{2}.$

Ответ: ½ .

Пример 4. Найти значение выражения $\frac{\log_6 18+\log_3 18}{\log_6 18\cdot\log_3 18}$.

Решение.

Разделим на знаменатель каждое слагаемое числителя по отдельности:

$$\frac{\log_6 18+\log_3 18}{\log_6 18\cdot\log_3 18} = \frac{1}{\log_3 18}+\frac{1}{\log_6 18} = \log_{18} 3+\log_{18} 6 = \log_{18}(3\cdot 6) = \log_{18} 18 = 1.$$

Переходя далее в каждом слагаемом к новому основанию 18, получаем, что

$$\frac{\log_6 18+\log_3 18}{\log_6 18\cdot\log_3 18} = \log_{18} 3+\log_{18} 6 = \log_{18}(3\cdot 6) = \log_{18} 18 = 1.$$

Преобразуем далее сумму логарифмов с одинаковым основанием в логарифм произведения и используем определение логарифма:

$$\frac{\log_6 18 + \log_3 18}{\log_6 18 \cdot \log_3 18} = \log_{18}(3 \cdot 6) = \log_{18} 18 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 5. Вычислить $\frac{\log_4 28}{\log_{112} 4} - \frac{\log_4 7}{\log_{448} 4}.$

Решение.

Для преобразования данного выражения перейдем во всех логарифмах к основанию 4:

$\log_{112} 4 = \frac{1}{\log_4 112}, \log_{448} 4 = \frac{1}{\log_4 448}$, тогда выражение принимает вид:

$$\frac{\log_4 28}{\log_{112} 4} - \frac{\log_4 7}{\log_{448} 4} = \log_4 28 \cdot \log_4 112 - \log_4 7 \cdot \log_4 448.$$

Далее разложим на множители логарифмируемые выражения, выделяя в каждом из них множитель вида 4^n:

$28 = 4 \cdot 7$, $112 = 16 \cdot 7 = 4^2 \cdot 7$, $448 = 64 \cdot 7 = 4^3 \cdot 7$.

Продолжим преобразование выражения, используя свойства логарифмов:

$$\log_4(4 \cdot 7) \cdot \log_4(4^2 \cdot 7) - \log_4 7 \cdot \log_4(4^3 \cdot 7) = (\log_4 4 + \log_4 7)(\log_4 4^2 + \log_4 7) -$$
$$- \log_4 7(\log_4 4^3 + \log_4 7) = (1 + \log_4 7)(2 + \log_4 7) - \log_4 7(3 + \log_4 7) =$$
$$= 2 + 2\log_4 7 + \log_4 7 + \log_4^2 7 - 3\log_4 7 - \log_4^2 7 = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 6. Вычислить $\left(2 - \log_3 \frac{9}{7}\right)\left(1 + \log_7 \frac{9}{7}\right).$

Решение.

Представим числа 2 и 1 в виде: $2 = \log_3 3^2 = \log_3 9,\ 1 = \log_7 7.$ Тогда

$$\left(\log_3 9 - \log_3 \frac{9}{7}\right)\left(\log_7 7 - \log_7 \frac{9}{7}\right) = \log_3\left(9 : \frac{9}{7}\right)\log_7\left(7 \cdot \frac{9}{7}\right) = \log_3 7 \cdot \log_7 9 = 2\log_3 7 \cdot \log_7 3 = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 7. Найти $\log_{175} 56,$ если $\log_{14} 7 = a,\ \log_{14} 5 = b.$

Решение.

Обратим внимание на то, что в каждом логарифме (либо в основании, либо в аргументе) присутствует множитель 7. Поэтому перейдем к основанию 7 во всех логарифмах:

$$\log_{175} 56 = \frac{\log_7 56}{\log_7 175} = \frac{\log_7(7 \cdot 2^3)}{\log_7(7 \cdot 5^2)} = \frac{1 + 3\log_7 2}{1 + 2\log_7 5}.$$

Обратим внимание, что $56 = 7 \cdot 2^3,\quad 175 = 7 \cdot 5^2$, тогда

$$\log_{175} 56 = \frac{\log_7 56}{\log_7 175} = \frac{\log_7(7 \cdot 2^3)}{\log_7(7 \cdot 5^2)} = \frac{1 + 3\log_7 2}{1 + 2\log_7 5}.$$

Следовательно, для вычисления этого логарифма нужно знать значения $\log_7 2$ и $\log_7 5.$ Воспользуемся формулами перехода к новому основанию:

$$\log_{14} 7 = \frac{1}{\log_7 14} = \frac{1}{1 + \log_7 2} = a, \log_7 2 = \frac{1 - a}{a}.$$

$$\log_{14}5=\frac{\log_7 5}{\log_7 14}=\frac{\log_7 5}{\frac{1}{a}}=a\log_7 5=b,\quad \log_7 5=\frac{b}{a}.$$

Подставим далее найденные значения в преобразованное исходное выражение:

$$\frac{1+3\log_7 2}{1+2\log_7 5}=\frac{1+\frac{3(1-a)}{a}}{1+\frac{2b}{a}}=\frac{\frac{a+3(1-a)}{a}}{\frac{a+2b}{a}}=\frac{3-2a}{a+2b}.$$

Ответ: $\frac{3-2a}{a+2b}$.

Пример 8. Известно, что $\log_{bc}\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{c}}$ лежит между числами *8* и *13*, а $\log_{bc} b$ принимает целые значения. Найти количество этих значений.

Решение.

Перейдем в обоих логарифмах к основанию b.

Для этого воспользуемся сначала формулой «логарифм частного» $\log_{bc}\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{c}}=\log_{bc}\sqrt[3]{b}-\log_{bc}\sqrt{c}$. Обратим далее внимание, что $\sqrt[3]{b}=b^{1/3},\quad \sqrt{c}=c^{1/2}$.

Получаем, что $\log_{bc}\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{c}}=\frac{1}{3}\log_{bc} b-\frac{1}{2}\log_{bc} c=$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log_b bc}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_b c}{\log_b bc}=\frac{1}{3(1+\log_b c)}-\frac{\log_b c}{2(1+\log_b c)}=\frac{2-3\log_b c}{6(1+\log_b c)}.$$

Решим методом интервалов неравенство $8\le\frac{2-3\log_b c}{6(1+\log_b c)}\le 13$.

Для этого перейдем к систем нестрогих неравенств: $\begin{cases}\frac{2-3\log_b c}{6(1+\log_b c)}\le 13\\ \frac{2-3\log_b c}{6(1+\log_b c)}\ge 8\end{cases}$.

Рассматривая каждое из записанных неравенств отдельно и впоследствии находя решение как пересечение множеств (решений первого и второго неравенств), получаем: $-\frac{76}{81}\le\log_b c\le-\frac{46}{51}$.

Выполним преобразования полученного двойного неравенства.

Прибавим 1 ко всем частям неравенства: $\frac{5}{81}\le 1+\log_b c\le\frac{5}{51}$. Поскольку $\log_{bc} b=\frac{1}{\log_b bc}=\frac{1}{1+\log_b c}$, его значения задаются неравенством:

$\frac{51}{5}\le\log_{bc} b\le\frac{81}{5}$, или $10\frac{1}{5}\le\log_{bc} b\le 16\frac{1}{5}$.

Следовательно, $\log_{bc} b$ может принимать 6 целых значений – от *11* до *16*.

Ответ: 6.