75 ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Комментарий. При решении логарифмических уравнений, также как в случае иррациональных уравнений возможно появление посторонних корней. Причина их появления – расширение области определения исходного уравнения. Поэтому и проверка корней логарифмического уравнения осуществляется либо непосредственно по предварительно найденной области определения, либо по условиям её задающим (подстановкой в соответствующую систему неравенств). Заметим, что иногда удобно осуществить проверку и непосредственной подстановкой найденных корней в исходное логарифмическое уравнение. Это, конечно же, допустимо. Естественно, что при решении логарифмических уравнений возможно и следование стратегии равносильных преобразований. Далее мы рассмотрим примеры решения разного рода.

Расширение области определения при решении логарифмических уравнений связано, как правило, с двумя обстоятельствами:

а) *преобразование потенцирования* («отбрасывания» логарифмов, замена уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ уравнением $f(x) = g(x)$);

б) *использование «справа – налево» формул*:

1. $\log_a (fg) = \log_a f + \log_a g$;
2. $\log_a \dfrac{f}{g} = \log_a f - \log_a g$;
3. $\log_a f^r = r \log_a f$;
4. $\log_{a^e} f^r = \dfrac{r}{e} \log_a f$.

Область определения левой части этих формул может быть шире области определения правой их части.

Заметим, что применение этих формул «слева – направо» вообще следует избегать, т.к. это может привести к сужению области определения уравнения и потере корней.

Пример 1. Решим уравнение $\log_4 \log_2 \log_3 (2x-1) = \dfrac{1}{2}$.

Решение.

Будем представлять правую часть уравнения последовательно в виде логарифмов с основаниями 4, 2 и 3 и проводить преобразование потенцирования:

$$\log_4 \log_2 \log_3 (2x-1) = \log_4 2,$$
$$\log_2 \log_3 (2x-1) = 2,$$
$$\log_2 \log_3 (2x-1) = \log_2 4,$$
$$\log_3 (2x-1) = 4,$$
$$\log_3 (2x-1) = \log_3 81,$$
$$2x-1 = 81, \ \ x = 41.$$

Проверим найденное значение непосредственной подстановкой в исходное уравнение:

$$\log_4 \log_2 \log_3 (2\cdot 41 - 1) = \frac{1}{2},$$

$$\log_4 \log_2 \log_3 81 = \frac{1}{2},$$

$\log_4 \log_2 4 = \frac{1}{2},\ \log_4 2 = \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Мы пришли к верному числовому равенству. Таким образом, $x = 41$ - единственный корень данного уравнения.

Ответ: 41.

Пример 2. Решим уравнение $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20).$

Решение.

Представим 1 как $\lg 10$ и преобразуем левую и правую части уравнения исходя из свойств логарифмов:

$$\lg 5 + \lg(x+10) = \lg 10 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20),$$

$$\lg(5(x+10)) = \lg\frac{10(21x-20)}{2x-1},$$

Потенцируя уравнение, получаем:

$$5(x+10) = \frac{10(21x-20)}{2x-1},$$

Решим это рациональное уравнение:

$$\frac{5(x+10)(2x-1) - 10(21x-20)}{2x-1} = 0,$$

$$\frac{2x^2 - 23x + 30}{2x-1} = 0,$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 23x + 30 = 0, \\ 2x - 1 \neq 0 \end{cases},$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 10.$$

Осуществим проверку корней. Область определения исходного уравнения задаётся условиями: $\begin{cases} x+10 > 0, \\ 2x-1 > 0, \\ 21x-20 > 0 \end{cases}$, т.е. область определения: $\left(\frac{20}{21}, +\infty\right)$. Оба корня, очевидно, принадлежат области определения. Таким образом, корни данного уравнения $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 10.$

Ответ: $1{,}5; 10$.

Пример 3. Решим уравнение: $\frac{1}{5 - 4\lg(x+1)} + \frac{5}{1 + 4\lg(x+1)} = 2.$

Решение.

Пусть $4\lg(x+1) = y,$ тогда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{5-y} + \frac{5}{1+y} = 2, \\ 4\lg(x+1) = y. \end{cases}$$

Корни первого уравнения системы: $y_1 = 4, y_2 = 2.$ Тогда исходное уравнение равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} 4\lg(x+1) = 4 \\ 4\lg(x+1) = 2 \end{array}\right.,$ т.е. $\left[\begin{array}{l} \lg(x+1) = 1, \\ \lg(x+1) = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Потенцируя полученные уравнения приходим к выводу, что *x=9* или *x=*$-1+\sqrt{10}$. Оба этих значения являются корнями данного уравнения, поскольку его область определения задается условием *x+1>0*, т.е. *x>-1*.

Ответ: 9; $-1+\sqrt{10}$.

Комментарий. Если в уравнении содержаться логарифмы с разными основаниями, то следует привести их к одному основанию, воспользовавшись формулами перехода к новому основанию логарифма:

1. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}, a>0, a\neq 1, c>0, c\neq 1, b>0;$
2. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}, a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1.$

Пример 4. Решим уравнение: $\log^2_{\sqrt{2}} x + 3\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2.$

Решение.

В данном уравнении перейдем к логарифмам по основанию 2:

$$\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}}\right)^2 + 3\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = 2,$$

$$4\log_2^2 x + 3\log_2 x - \log_2 x = 2,$$

$$4\log_2^2 x + 2\log_2 x - 2 = 0,$$

$$2\log_2^2 x + \log_2 x - 1 = 0.$$

Последнее уравнение равносильно системе: $\begin{cases} 2t^2 + t - 1 = 0, \\ t = \log_2 x. \end{cases}$

Корни первого уравнения системы $t_1 = -1, t_2 = \dfrac{1}{2}$. Таким образом, имеем совокупность уравнений: $\left\{\begin{array}{l} \log_2 x = -1, \\ \log_2 x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$, которая равносильна системе $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}, \\ x = -2, \end{array}\right. \\ x > 0. \end{cases}$

Откуда очевидно, что $x = \dfrac{1}{2}$ - единственный корень данного уравнения.

Заметим, что применение формул перехода к новому основанию логарифма, как правило, приводит к изменению области определения уравнения. Поэтому, следует анализировать в ходе решения, как возможность, появления посторонних корней, так и возможность потери корней.

Ответ: 0,5.

Пример 5. Решим уравнение: $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0.$

Решение.

Прежде всего, воспользуемся известным свойством логарифма и получим одинаковое для всех логарифмов логарифмируемое выражение:

$$2\log_{\frac{x}{2}} x - 42\log_{16x} x + 20\log_{4x} x = 0,$$

$$\log_{\frac{x}{2}} x - 21\log_{16x} x + 10\log_{4x} x = 0.$$

Теперь воспользуемся формулой перехода к новому основанию логарифма, получаем:

$$\frac{1}{\log_x \frac{x}{2}} - \frac{21}{\log_x 16x} + \frac{16}{\log_x 4x} = 0.$$

Далее имеем:

$$\frac{1}{\log_x x - \log_x 2} - \frac{21}{\log_x 16 + \log_x x} + \frac{16}{\log_x 4 + \log_x x} = 0,$$

$$\frac{1}{1 - \log_x 2} - \frac{21}{\log_x 16 + 1} + \frac{16}{\log_x 4 + 1} = 0,$$

$$\frac{1}{1 - \log_x 2} - \frac{21}{4\log_x 2 + 1} + \frac{16}{2\log_x 2 + 1} = 0.$$

Корни второго уравнения системы: $y_1 = -2, y_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, решение исходного уравнения свелось к решению совокупности: $\left[\begin{array}{l} \log_x 2 = -2, \\ \log_x 2 = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Решим первое уравнение совокупности:

$$\log_x 2 = -2,$$

$$\frac{1}{\log_2 x} = -2,$$

$$\log_2 x = -\frac{1}{2},$$

$$\log_2 x = -\log_2 \sqrt{2},$$

$$\log_2 x = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Аналогично, решая второе уравнение совокупности, получаем *x=4*.

Найдем, теперь область определения исходного уравнения и проведем проверку корней: $\begin{cases} x > 0, \\ \frac{x}{2} \neq 1, \\ 16x \neq 1, \\ 4x \neq 1, \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq \frac{1}{16}, \\ x \neq \frac{1}{4}. \end{cases}$

Ясно, что оба найденных значения *x* удовлетворяют области определения.

Наконец, следует проанализировать возможную потерю корней. Для этого выясним, когда наши преобразования приводили к сужению области определения уравнения. После перехода к новому основанию логарифма дальнейшее решение осуществляется при условии: $x > 0$ и $x \neq 1$. Дополнительное условие $x \neq 1$ не имеет отношения к исходному уравнению, поэтому *x=1* – возможный потерянный корень. Подставив значение *x=1* в исходное уравнение, убеждаемся, что это действительно корень. Таким образом, корни исходного уравнения: $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = 1, x_3 = 4.$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 4$.

Комментарий. Применяя при решении логарифмических уравнений формулы перехода к новому основанию целесообразней переходить к новому основанию не являющемуся выражением с переменной, а равному некоторому числу. Как правило, это позволяет избежать потери корней. Каким конкретно числом должно быть новое основание логарифмов всегда можно понять, проанализировав данное уравнение.

Так в рассмотренном выше примере, подходящим новым основанием логарифмов является число 2. Это следует из того, что все входящие в уравнения основания логарифмов имеют вид: $2^{\alpha}x,$ где α - целое число.

Далее, с учетом этого замечания оформим решение уравнения из примера 6 как схему равносильных переходов.

$$\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{16}, \\ x \neq \frac{1}{4}, \\ x \neq 2, \\ \log_{\frac{x}{2}} x - 21\log_{16x} x + 10\log_{4x} x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{16}, \\ x \neq \frac{1}{4}, \\ x \neq 2, \\ \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{x}{2}} - \frac{21\log_2 x}{\log_2 16x} + \frac{10\log_2 x}{\log_2 4x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{16}, \\ x \neq \frac{1}{4}, \\ x \neq 2, \\ \frac{\log_2 x}{\log_2 x - 1} - \frac{21\log_2 x}{\log_2 x + 4} + \frac{10\log_2 x}{\log_2 x + 2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{y-1} - \frac{21y}{y+4} + \frac{10y}{y+2} = 0, \\ y = \log_2 x, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{16}, \\ x \neq \frac{1}{4}, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ \frac{1}{y-1} - \frac{21}{y+4} + \frac{10}{y+2} = 0, \end{array}\right. \\ y = \log_2 x, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{16}, \\ x \neq \frac{1}{4}, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ \frac{-2y^2 + 3y + 2}{(y-1)(y+4)(y+2)} = 0, \end{array}\right. \\ y = \log_2 x, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{16}, \\ x \neq \frac{1}{4}, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=0, \\ y=-\dfrac{1}{2}, \\ y=2 \end{array}\right. \\ y=\log_2 x, \\ x>0, \\ x\neq\dfrac{1}{16}, \\ x\neq\dfrac{1}{4}, \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2 x=0, \\ \log_2 x=-\dfrac{1}{2}, \\ \log_2 x=2 \end{array}\right. \\ y=\log_2 x, \\ x>0, \\ x\neq\dfrac{1}{16}, \\ x\neq\dfrac{1}{4}, \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Еще раз следует отметить, что решение любого уравнения должно осуществляться не механически, а сознательно, с пониманием сущности всех преобразований, с обязательным анализом возможностей появления посторонних корней и потери корней. Если такой анализ непосредственно «вплетен» в ход решения, то наиболее действенно оформлять это решение схемой равносильных переходов. Хотя это и приводит, порой, к весьма громоздким записям. Громоздкости при записи решения уравнения в виде схемы равносильных переходов можно избежать следующим приемом: начать решение уравнения с нахождения области определения и затем при проведении решения соблюдать не «равносильность вообще», а «равносильность на области определения». Оформим решение уравнения из примера 6 с учетом этого приема.

$$\log^2_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0.$$

Область определения этого уравнения (множество М):

M=$\left(0,\dfrac{1}{16}\right)\cup\left(\dfrac{1}{16},\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4},2\right)\cup(2,+\infty).$

Далее, имеем:

$$\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0 \overset{M}{\Leftrightarrow} \log_{\frac{x}{2}} x - 21\log_{16x} x + 10\log_{4x} x = 0 \overset{M}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{M}{\Leftrightarrow} \frac{\log_2 x}{\log_2 x - 1} - \frac{21\log_2 x}{\log_2 x + 4} + \frac{10\log_2 x}{\log_2 x + 2} = 0 \overset{M}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \dfrac{y}{y-1} - \dfrac{21y}{y+4} + \dfrac{10y}{y+2} = 0, \\ y = \log_2 x \end{cases} \overset{M}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{M}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=0, \\ \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{21}{y+4} + \dfrac{y}{y+2} = 0, \end{array}\right. \\ y=\log_2 x \end{cases} \overset{M}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=0, \\ y=-\dfrac{1}{2}, \\ y=2 \end{array}\right., \\ y=\log_2 x \end{cases} \overset{M}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \log_2 x=0, \\ \log_2 x=-\dfrac{1}{2}, \\ \log_2 x=2 \end{array}\right. \overset{M}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Оформим также в виде равносильных переходов решения уравнений из следующих примеров. Эти уравнения (весьма распространенные в заданиях ЕГЭ, группа С), содержащие логарифмы, у которых и основания, и логарифмируемые выражения – выражения с переменной.

Пример 6. Решим уравнение: $1+\log_x\dfrac{4-x}{10} = (\lg x^2 - 1)\log_x 10.$

Решение.

Область определения этого уравнения (множество *M*):

$$M:\begin{cases}\dfrac{4-x}{10}>0,\\ x>0,\\ x\neq 1\end{cases}$$, т.е. $M=(0,1)\cup(1,4)$.

Далее, имеем:

$$1+\log_x\frac{4-x}{10}=(\lg x^2-1)\log_x 10\overset{M}{\Leftrightarrow}1+\log_x(4-x)-\log_x 10=(2\lg x-1)\log_x 10\overset{M}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{M}{\Leftrightarrow}1+\log_x(4-x)-\frac{1}{\lg x}=(2\lg x-1)\frac{1}{\lg x}\overset{M}{\Leftrightarrow}1+\log_x(4-x)-\frac{1}{\lg x}=2-\frac{1}{\lg x}\overset{M}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{M}{\Leftrightarrow}\log_x(4-x)=1\overset{M}{\Leftrightarrow}\log_x(4-x)=\lg_x x\overset{M}{\Leftrightarrow}4-x=x\overset{M}{\Leftrightarrow}x=2.$$

Ответ: 2.

Пример. **а)** Решим уравнение $\log_{x-2}(2x-9)=\log_{x-2}(23-6x)$.

$$\log_{x-2}(2x-9)=\log_{x-2}(23-6x)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2x-9>0,\\ 23-6x>0,\\ x-2>0,\\ x-2\neq 1,\\ 2x-9=23-6x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{9}{2},\\ x<\dfrac{23}{6},\\ x>2,\\ x\neq 3,\\ 8x=32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{9}{2}<x<\dfrac{23}{6},\\ x\neq 3,\\ x=4\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$$

б) Решим уравнение: $\log_{x+1}(x-\frac{1}{2})=\log_{x-\frac{1}{2}}(x+1)$.

$$\log_{x+1}(x-\frac{1}{2})=\log_{x-\frac{1}{2}}(x+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\dfrac{1}{2}>0,\\ x+1>0,\\ x-\dfrac{1}{2}\neq 1,\\ x+1\neq 1,\\ \log_{x+1}(x-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{\log_{x+1}(x-\frac{1}{2})}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\ x>-1,\\ x\neq\dfrac{3}{2},\\ x\neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}\log_{x+1}(x-\frac{1}{2})=1,\\ \log_{x+1}(x-\frac{1}{2})=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\ x\neq\dfrac{3}{2},\\ \left[\begin{array}{l}\log_{x+1}(x-\frac{1}{2})=\log_{x+1}(x+1),\\ \log_{x+1}(x-\frac{1}{2})=\log_{x+1}\dfrac{1}{x+1}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2}, \\ x \neq \dfrac{3}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{1}{2} = x + 1, \\ x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x+1} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2}, \\ x \neq \dfrac{3}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2}, \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: а) ∅; б) 1.

Рассмотрим далее несколько примеров решения логарифмических неравенств.

Пример 8. Решим неравенство: $\log_2(\log_3(2 - \log_4 x)) < 1.$

Решение.

$$\log_2(\log_3(2 - \log_4 x)) < 1 \Leftrightarrow \log_2(\log_3(2 - \log_4 x)) < \log_2 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(2 - \log_4 x) < 2, \\ \log_3(2 - \log_4 x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \log_3(2 - \log_4 x) < 2 \Leftrightarrow \log_3 1 < \log_3(2 - \log_4 x) < \log_3 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < 2 - \log_4 x < 9, \\ 2 - \log_4 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 < \log_4 x < 7 \Leftrightarrow 1 > \log_4 x > -7 \Leftrightarrow \log_4 4 > \log_4 x > \log_4 \frac{1}{16384} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{16384} < x < 4, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{16384 < x < 4.}$$

Таким образом, решение данного неравенства: $\left(\dfrac{1}{16384}, 4\right).$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{16384}, 4\right).$

Пример 9. Решим неравенство: $\dfrac{1}{2} + \log_9 x - \log_3 5x > \log_{\frac{1}{3}}(x+3).$

Решение.

$$\frac{1}{2} + \log_9 x - \log_3 5x > \log_{\frac{1}{3}}(x+3) \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{\log_3 x}{\log_3 9} - \log_3 5x > \frac{\log_3(x+3)}{\log_3 \frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_3 x - \log_3 5x > -\log_3(x+3) \Leftrightarrow \log_3 3 + \log_3 x - \log_3 5x + \log_3(x+3) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 \dfrac{3x(x+3)}{5x} > \log_3 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{5}(x+3) > 1, \\ x > 0, \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{4}{3}, \\ x > 0, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Таким образом, решение исходного неравенства: $(0, +\infty).$

Ответ: $(0, +\infty).$

Пример 10. Решим неравенство: $\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2 - x).$

Решение.

$$\log_x(x+1)<\log_{\frac{1}{x}}(2-x)\Leftrightarrow \log_x(x+1)<\frac{\log_x(2-x)}{\log_x\frac{1}{x}}\Leftrightarrow \log_x(x+1)<\log_x\frac{1}{2-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>1,\\ x+1<\dfrac{1}{2-x},\\ x+1>0,\\ 2-x>0,\\ x>0,\\ x\neq 1\end{cases},\Leftrightarrow\begin{cases}x<1,\\ x+1>\dfrac{1}{2-x},\\ x+1>0,\\ 2-x>0,\\ x>0,\\ x\neq 1\end{cases},\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1<x<2,\\ x+1<\dfrac{1}{2-x},\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1,\\ x+1>\dfrac{1}{2-x}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1<x<2,\\ \dfrac{(x+1)(2-x)-1}{2-x}<0,\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1,\\ \dfrac{(x+1)(2-x)-1}{2-x}>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1<x<2,\\ \dfrac{x^2-x-1}{x-2}<0,\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1,\\ \dfrac{x^2-x-1}{x-2}>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1<x<2,\\ \left[\begin{array}{l}x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1,\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ x>2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2,\\ 0<x<1.\end{array}\right.$$

Таким образом, решение исходного неравенства: $(0,1)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},2\right)$.

Ответ: $(0,1)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},2\right)$.

И, наконец, рассмотрим примеры решения логарифмических уравнений с параметром.

Пример 11. Решим уравнение: $\log_9 x+\log_9\frac{2-x}{2}=\log_9\log_9 a.$

Решение.

Так же, как и в предыдущем примере, будем строго соблюдать требования равносильности преобразований. Тогда, имеем:

$$\log_9 x+\log_9\frac{2-x}{2}=\log_9\log_9 a\Leftrightarrow\begin{cases}\log_9\dfrac{(2-x)x}{2}=\log_9\log_9 a,\\ x>0,\\ \dfrac{2-x}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(2-x)x}{2}=\log_9 a,\\ \log_9 a>0,\\ x>0,\\ 2-x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2-x)x=2\log_9 a,\\ \log_9 a>\log_9 1,\\ x>0,\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+\log_9 a=0,\\ a>1,\\ a>0,\\ 0<x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+\log_9 a=0,\\ a>1,\\ 0<x<2\end{cases}.$$

Найдем *x* из уравнения $x^2-2x+2\log_9 a=0.$ Имеем: $\frac{Д}{4}=1-2\log_9 a.$ Т.е., условие существования корней этого квадратного уравнения: $1-2\log_9 a\ge 0,$ или $a\le 3.$

Вид корней: $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-2\log_9 a}.$

Условие существования корней исходного логарифмического уравнения задаются, таким образом, следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} a>1, \\ a\le 3, \\ 0<1\pm\sqrt{1-2\log_9 a}<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ a\le 3, \\ \left[\begin{array}{l} 0<1+\sqrt{1-2\log_9 a}<2, \\ 0<1-\sqrt{1-2\log_9 a}<2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ a\le 3, \\ \left[\begin{array}{l} -1<\sqrt{1-2\log_9 a}<1, \\ -1<-\sqrt{1-2\log_9 a}<1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ a\le 3, \\ -1<\sqrt{1-2\log_9 a}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ a\le 3, \\ 1-2\log_9 a<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ a\le 3, \end{cases} \Leftrightarrow 1<a\le 3.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень $x=1,$ если $a=3,$ имеет два корня вида $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-2\log_9 a},$ если $a\in(1{,}3)$ и не имеет корней, если $a\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty).$

Ответ: Если $a=3,$ то единственный корень $x=1,$ если $a\in(1{,}3)$ - два корня вида $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-2\log_9 a},$ если $a\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ - нет корней.

Пример 12. Решим уравнение: $\log_a x+\log_{\sqrt{a}} x+\log_{\sqrt[3]{a^2}} x=27.$

Решение.

Прежде всего, выясним условие существования корней уравнения. Имеем систему:

$$\begin{cases} a>0, \\ a\ne 1, \\ \sqrt{a}>0, \\ \sqrt{a}\ne 1, \\ \sqrt[3]{a^2}>0, \\ \sqrt[3]{a^2}\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ a\ne 1. \end{cases}$$

Далее, перейдем к одному и тому же основанию логарифмов и решим уравнение:

$$\log_a x+\frac{\log_a x}{\log_a\sqrt{a}}+\frac{\log_a x}{\log_a\sqrt[3]{a^2}}=27,$$

$$\log_a x+2\log_a x+\frac{3}{2}\log_a x=27,$$

$$\log_a x+\log_a x^2+\log_a x^{\frac{3}{2}}=27,$$

$$\log_a (x\cdot x^2\cdot x^{\frac{3}{2}})=27,$$

$$\log_a x^{\frac{9}{2}}=27,$$

$$\frac{9}{2}\log_a x = 27,$$
$$\log_a x = 6,$$
$$\begin{cases} x = a^6, \\ x > 0. \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень вида, $x = a^6$, если $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ и не имеет корней, если $a \in (-\infty,0] \cup \{1\}$.

Ответ: если $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, то единственный корень $x = a^6$; если $a \in (-\infty,0] \cup \{1\}$ - нет корней.

Комментарий. Для решения показательного уравнения его нужно свести к простейшему уравнению вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, откуда следует, что $f(x) = g(x)$. Иногда такое преобразование можно провести непосредственно, в других случаях требуется предварительно сделать замену переменной.

Пример 13. Решить уравнение: $0{,}125 \cdot \sqrt[3]{4^{3x-2}} = \dfrac{256}{0{,}5^x}$.

Решение.

Представим обе части равенства в виде степеней с основанием 2:

$2^{-3} \cdot \left(2^{6x-4}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^8 : 2^{-x}$, $2^{-3+2x-\frac{4}{3}} = 2^{8+x}$, $-\dfrac{13}{3} + 2x = 8 + x$, $x = 12\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $12\dfrac{1}{3}$.

Пример 14. Решить уравнение: $4^{x+2} + 2 \cdot 4^x - 5^{x+2} = 5 \cdot 5^x$.

Решение.

Поменяем порядок слагаемых: $4^{x+2} + 2 \cdot 4^x = 5^{x+2} + 5 \cdot 5^x$, $4^x(16 + 2) = 5^x(25+5)$,

$18 \cdot 4^x = 30 \cdot 5^x$, $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x = \dfrac{30}{18} = \dfrac{5}{3} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{\log_{\frac{4}{5}}\frac{5}{3}}$, $x = \log_{\frac{4}{5}}\dfrac{5}{3}$.

Ответ: $\log_{\frac{4}{5}}\dfrac{5}{3}$.

Пример 15. Решить уравнение: $2^{x+4} \cdot 3^x = 576$.

Решение.

Преобразуем левую часть: $16 \cdot (2^x \cdot 3^x) = 576$ и разделим обе части на 16: $6^x = 36$, $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 16. Решить уравнение: $4^{x+\frac{1}{2}} + 4 \cdot 2^{x+2} - 40 = 0$.

Решение.

Запишем уравнение в виде: $2 \cdot 2^{2x} + 16 \cdot 2^x - 40 = 0$ и сделаем замену: $t = 2^x$ ($t > 0$). Тогда

$2t^2 + 16t - 40 = 0$, $t^2 + 8t - 20 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = -10 < 0$ – посторонний корень. Обратная замена: $2^x = 2$, $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 17. Решить уравнение: $2^{2x}-8\cdot 5^{2x}+2\cdot 10^{x}=0.$

Решение.

Если записать левую часть так: $4^{x}-8\cdot 25^{x}+2\cdot 10^{x}=0,$ то можно заметить, что основания степеней (числа 4, 10, 25) образуют геометрическую прогрессию. В этом случае можно разделить обе части равенства, например, на 25^x (поскольку ни при каком x это выражение не равно нулю) и получить уравнение $\left(\frac{4}{25}\right)^{x}+2\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^{x}-8=0,$ или

$5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}+2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{x}-8=0.$ Замена $t=\left(\frac{2}{5}\right)^{x}$ $(t>0)$ приводит к уравнению $t^2+2t-8=0$,

$t_1=2$, $t_2=-4<0$ – посторонний корень. Следовательно, $\left(\frac{2}{5}\right)^{x}=2,\ x=\log_{\frac{2}{5}}2.$

Ответ: $\log_{\frac{2}{5}}2.$

Пример 18. Решить уравнение: $12x\cdot 4^x-5x\cdot 2^{x+1}-9\cdot 4^{x+1}+30\cdot 2^x=0.$

Решение.

Разложим левую часть на множители: $2^{x}(2x(6\cdot 2^{x}-5)-6(6\cdot 2^{x}-5))=0,$

$2^{x}(2x-36)(6\cdot 2^{x}-5)=0.$ Первый множитель никогда не равен нулю, поэтому ответом будут корни уравнений:

1 случай. $2x-6=0$, $x=3$.

2 случай. $6\cdot 2^{x}-5=0,\ 2^{x}=\frac{5}{6},\ \ x=\log_{2}\frac{5}{6}.$

Ответ: 3; $\log_{2}\frac{5}{6}.$

Пример 19. Решить уравнение: $\left|3^{x}+\frac{17}{9}\right|+\left|3^{x}-\frac{1}{9}\right|=2.$

Решение.

Заметим, что первое подмодульное выражение положительно при любом x, то есть его модуль равен подмодульному выражению. Рассмотрим две возможности для знака второго подмодульного выражения:

1 случай. $3^{x}-\frac{1}{9}\geq 0\Rightarrow x\geq -2.$ Тогда $3^{x}+\frac{17}{9}+3^{x}-\frac{1}{9}=2,\ 2\cdot 3^{x}=\frac{2}{9},\ 3^{x}=\frac{1}{9},\ \ x=-2.$

2 случай. $3^{x}-\frac{1}{9}<0\Rightarrow x<-2.$ При этом $3^{x}+\frac{17}{9}-3^{x}+\frac{1}{9}=2,\ 2=2$ – тождество, следовательно, любое значение $x<-2$ является решением уравнения.

Ответ: $x\leq -2.$

Пример 20. Решить уравнение: $|x-5|^{4x^{2}-23x+15}=1.$

Решение.

При решении этого уравнения важно не забыть, что равенство будет верным не только в случае, когда показатель степени равен 0, но и тогда, когда основание степени в левой части равно 1, так как при возведении 1 в любую степень мы получим 1. Кроме того, ОДЗ определяется условием: $x-5\neq 0$, то есть $x\neq 5$.

1 случай. $\begin{cases} 4x^2 - 23x + 15 = 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5, \quad x_2 = \dfrac{3}{4} \\ x \neq 5 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{3}{4}.$

2 случай. $|x-5| = 1, \quad x - 5 = \pm 1, \quad x_1 = 6, \quad x_2 = 4.$

Ответ: 4; 6; $\dfrac{3}{4}$.

Комментарий. Решение показательных неравенств сводится к решению простейших неравенств:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \; a^{f(x)} \geq a^{g(x)}, \; a^{f(x)} < a^{g(x)}, \; a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \; (a > 0).$$

Важно помнить при этом, что при *a* > 1 можно перейти к неравенству, связывающему показатели степеней, знак которого совпадает со знаком исходного неравенства; при 0 < *a* < 1 показатели будут связаны неравенством противоположного знака.

Пример 21. Решить неравенство: $1024^x < \left(\dfrac{1}{16}\right)^{x^2+2x+\frac{9}{2}}$.

Решение.

Представим обе части неравенства как степени с основанием 2:

$2^{10x} < \left(2^{-4}\right)^{x^2+2x+\frac{9}{2}}, \; 2^{10x} < 2^{-4x^2-8x-18}, \; 10x < -4x^2 - 8x - 18, \; 4x^2 + 18x + 8x < 0, \; -3 < x < -\dfrac{3}{2}.$

Ответ: $\left(-3; -\dfrac{3}{2}.\right)$

Пример 22. Решить неравенство: $3^x - 12 < -\dfrac{70}{3^x + 7}$.

Решение.

После замены $t = 3^x$ решим систему неравенств: $\begin{cases} t > 0 \\ t - 12 < -\dfrac{70}{t+7} \end{cases}$. Поскольку знаменатель дроби в правой части второго неравенства при $t > 0$ положителен, можно умножить на него обе части неравенства, превратив его в квадратное: $\begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 5t - 14 < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < t < 7.$

Сделаем обратную замену: $0 < 3^x < 7, \; x < \log_3 7$ (левая часть неравенства верна при любом *x*).

Ответ: $(-\infty; \log_3 7)$.

Пример 23. Решить неравенство: $3^{x^2-6x+8} > 5^{x-2}$.

Решение.

Перейдем к основанию 3: $3^{x^2-6x+8} > \left(3^{\log_3 5}\right)^{x-2}, \; x^2 - 6x + 8 > \log_3 5 \cdot (x-2),$

$(x-2)(x-4) > \log_3 5 \cdot (x-2), \; (x-2)(x-4-\log_3 5) > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 4 + \log_3 5 \end{array}\right.$.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (4 + \log_3 5; +\infty)$.

Пример 24. Решить неравенство: $16 \cdot 5^x - 20^x + 4^x > 16$.

Решение.

Перенесем все слагаемые в левую часть и разложим ее на множители:
$(16 - 4^x)(5^x - 1) > 0$. Найдем корни левой части неравенства:
1 случай. $16 - 4^x = 0$, $x = 2$;
2 случай. $5^x - 1 = 0$, $x = 0$.
Решим неравенство методом интервалов:

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & \circ & & \circ & \end{array}$$

Итак, $0 < x < 2$.
Ответ: (0; 2).

Пример 25. Решить неравенство: $3 \cdot 9^x - 8 \cdot 15^x + 5^{2x+1} < 0.$
Решение.
Запишем неравенство в виде: $3 \cdot 9^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 25^x < 0$ и разделим обе его части на 25^x (при делении на положительное число знак неравенства не изменится):

$$3 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^x - 8 \cdot \left(\frac{15}{25}\right)^x + 5 < 0,\ 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 5 < 0,\ t = \left(\frac{3}{5}\right)^x, \begin{cases} t > 0 \\ 3t^2 - 8t + 5 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ 1 < t < \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow 1 < t < \frac{5}{3}.$ Сделаем обратную замену: $1 < \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{5}{3},\ \left(\frac{3}{5}\right)^0 < \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$.
Поскольку основание степени меньше 1, при переходе к показателям знак неравенства меняется: $-1 < x < 0$.
Ответ: (- 1; 0).

Пример 26. Решить неравенство: $\sqrt{2 \cdot 4^x - 4} > 4^x - 6.$
Решение.
Замена $t = 4^x$ превращает неравенство в иррациональное: $\begin{cases} t > 0 \\ \sqrt{2t - 4} > t - 6 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t > 0 \\ 2t - 4 \geq 0 \\ t - 6 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t > 0 \\ 2t - 4 \geq 0 \\ t - 6 \geq 0 \\ 2t - 4 > t^2 - 12t + 36 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \leq t < 6 \\ 6 \leq t < 10 \end{array} \right. \Rightarrow 2 \leq t < 10 \Rightarrow 2 \leq 4^x < 10 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < \log_4 10.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; \log_4 10\right)$.

Комментарий. В логарифмических уравнениях, в отличие от показательных, нужно внимательно следить за тем, чтобы не включить в ответ посторонние корни. Их появление связано с дополнительными ограничениями на знак логарифмируемых выражений и оснований логарифмов.

Логарифмическое уравнение можно привести к одному или нескольким простейшим следующих видов:

- $\log_a f(x) = b \Rightarrow f(x) = a^b$. При этом *f* (*x*) принимает только положительные значения, поэтому посторонние корни не появляются (если не было ограничений ранее);
- $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Такое уравнение можно свести к системе: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

Пример 27. Решить уравнение: $\log_4\left(\dfrac{x+7}{5}\right) - \log_{\frac{1}{4}}(5-x) - 1 = 0.$

Решение.

Определим ОДЗ: $\begin{cases} x+7>0 \\ 5-x>0 \end{cases} \Rightarrow -7 < x < 5$ и перейдем во втором логарифме к основанию 4: $\log_4\left(\dfrac{x+7}{5}\right) + \log_4(5-x) = 1,\ \dfrac{(x+7)(5-x)}{5} = 4,\ x^2 + 2x - 15 = 0,$

$x_1 = -5$, $x_2 = 3$ (оба входят в ОДЗ).

Ответ: - 5; 3.

Пример 28. Решить уравнение: $\log_x(x^2 - 3x + 1) - \log_{\sqrt{x}} \sqrt{3x-4} = 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 3x + 1 > 0 \\ 3x - 4 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.$

Представим $\log_{\sqrt{x}} \sqrt{3x-4} = \log_{x^{\frac{1}{2}}} (3x-4)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \log_x(3x-4).$ Тогда уравнение можно записать так: $\log_x(x^2 - 3x + 1) = \log_x(3x-4),\ x^2 - 3x + 1 = 3x - 4,\ x^2 - 6x + 5 = 0,$

$x_1 = 1$ – не входит в ОДЗ, $x_2 = 5$ – входит в ОДЗ.

Ответ: 5.

Пример 29. Решить уравнение: $\log_{4x+1} 10 + \log_{x-\frac{17}{9}} 10 = 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 4x+1>0 \\ 4x+1 \neq 1 \\ x - \dfrac{17}{9} > 0 \\ x - \dfrac{17}{9} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x > \dfrac{17}{9},\ x \neq \dfrac{26}{9}.$

Перейдем в обоих логарифмах к основанию 10:

$$\frac{1}{\lg(4x+1)} + \frac{1}{\lg\left(x - \frac{17}{9}\right)} = 0,\quad \frac{\lg(4x+1) + \lg\left(x - \frac{17}{9}\right)}{\lg(4x+1)\cdot\lg\left(x - \frac{17}{9}\right)} = 0,\quad \frac{\lg\left(4x^2 - \frac{59}{9}x - \frac{17}{9}\right)}{\lg(4x+1)\cdot\lg\left(x - \frac{17}{9}\right)} = 0,$$

$\lg\left(4x^2-\frac{59}{9}x-\frac{17}{9}\right)=0,\ 4x^2-\frac{59}{9}x-\frac{17}{9}=1,\ 36x^2-59x-26=0,\ x_1=2,\ x_2=-\frac{1}{36}-$ не входит в ОДЗ.

Ответ: 2.

Пример 30. Решить уравнение: $\frac{\log_2(x^2-6x+9)-6}{\sqrt{12-4x-x^2}}=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-6x+9>0 \\ 12-4x-x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)^2>0 \\ -6<x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ -6<x<2 \end{cases}.$

Обратите внимание на то, что логарифмируемое выражение представляет собой полный квадрат, поэтому оно положительно при всех x, кроме $x = 3$. Условие на подкоренное выражение задается в виде строгого неравенства, так как знаменатель не должен равняться нулю.

При выполнении этих условий уравнение можно записать так:

$\log_2(x-3)^2=6,\ \log_2|x-3|=3,\ |x-3|=8,\ x-3=\pm 8,\ x_1=-5,\ x_2=11-$ не входит в ОДЗ.

Ответ: - 5.

Пример 31. Решить уравнение: $\log_9\log_3 x+\log_3\log_{27} x=\frac{1}{2}.$

Решение.

ОДЗ: $x > 1$ (при этом $\log_3 x > 0$ и $\log_{27} x > 0$, то есть положительными являются аргументы внешних логарифмов).

Перейдем во всех логарифмах к основанию 3:

$\frac{1}{2}\log_3\log_3 x+\log_3\left(\frac{1}{3}\log_3 x\right)=\frac{1}{2},\ \log_3\log_3 x+2\log_3\log_3 x-2=1,\ \log_3\log_3 x=1,$

$\log_3 x=3,\ x=27.$

Ответ: 27.

Комментарий. В логарифмических уравнениях часто полезно применять замену переменной.

Пример 32. Решить уравнение: $2\log_2 x+2\log_x 2=5.$

Решение.

ОДЗ: $x>0,\ x\neq 1.$

Пусть $t=\log_2 x,$ тогда $\log_x 2=\frac{1}{\log_2 x}=\frac{1}{t};\ 2t+\frac{2}{t}=5,\ 2t^2-5t+2=0,\ t_1=2,$ $t_2=\frac{1}{2}.$ Сделаем обратную замену:

1 случай. $\log_2 x=2,\ x=2^2=4;$

2 случай. $\log_2 x=\frac{1}{2},\ x=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.$

Ответ: 4; $\sqrt{2}.$

Пример 33. Решить уравнение: $\log_4(x-4)\cdot\log_4(x+4)=\log_4(x^2-16)-1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-4>0 \\ x+4>0 \\ x^2-16>0 \end{cases} \Rightarrow x>4.$

Представим $\log_4(x^2-16)=\log_4\big((x-4)(x+4)\big)=\log_4(x-4)+\log_4(x+4)$ и введем новые переменные: $u=\log_4(x-4),\ v=\log_4(x+4),$ для которых имеем уравнение: $uv=u+v-1,\ (uv-u)-(v-1)=0,\ (u-1)(v-1)=0.$ Приравняем к нулю каждый множитель:

1 случай. $u-1=0,\ \log_4(x-4)=1,\ x-4=4,\ x=8.$

2 случай. $v-1=0,\ \log_4(x+4)=1,\ x+4=4,\ x=0-$ не входит в ОДЗ.

Ответ: 8.

Комментарий. Нередко в уравнение входят одновременно логарифмические и показательные функции. Рассмотрим такие комбинированные задания.

Пример 34. Решить уравнение: $\log_5(5^x-3)+x=\log_5 10.$

Решение.

ОДЗ: $5^x-3>0.$

Представим $x=x\cdot 1=x\cdot\log_5 5=\log_5 5^x.$ Тогда уравнение примет вид:

$\log_5(5^x-3)+\log_5 5^x=\log_5 10,\ (5^x-3)5^x=10.$ Сделаем замену: $t=5^x$ $(t>3)$ и решим уравнение для t: $(t-3)t=10,\ t^2-3t-10=0,\ t_1=5,\ t_2=-2<3-$посторонний корень. Обратная замена: $5^x=5$, $x=1$.

Ответ: 1.

Пример 35. Решить уравнение: $x^{4\lg x-1}=100x.$

Решение.

ОДЗ: $x>0$. При выполнении этого условия обе части равенства положительны, поэтому их можно логарифмировать. Прологарифмируем левую и правую части по основанию 10: $\lg\left(x^{4\lg x-1}\right)=\lg(100x),\ (4\lg x-1)\lg x=2+\lg x.$ Замена $t=\lg x$ приводит к уравнению $(4t-1)t=2+t$, $2t^2-t-1=0$, $t_1=1$, $t_2=-½$.

1 случай. $\lg x=1$, $x=10$;

2 случай. $\lg x=-\frac{1}{2},\ x=10^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$

Ответ: 10; $\frac{1}{\sqrt{10}}.$

Пример 36. Решить уравнение: $(x+11)^{\log_{x-1}9}=81.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+11>0 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x>1,\ x\neq 2.$

Прологарифмируем обе части по основанию 9: $\log_9\left((x+11)^{\log_{x-1}9}\right)=\log_9 81,$

$\log_{x-1}9\cdot\log_9(x+11)=2,\ \frac{\log_9(x+11)}{\log_9(x-1)}=2,\ \log_9(x+11)=2\log_9(x-1),\ x+11=(x-1)^2,$

$x^2 - 3x - 10 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ – не входит в ОДЗ.

Ответ: 5.

Комментарий. При решении показательно-логарифмических систем применяются как обычные методы решения систем (подстановка, замена переменных), так и приемы решения соответствующих уравнений. Если в системе присутствуют логарифмы, не забудьте об ограничениях на допустимые значения неизвестных. Если получившиеся неравенства трудны для решения (например, неравенства с двумя переменными), можно ограничиться подстановкой в них найденных решений.

Пример 37. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 4 \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 3 \end{cases}$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.

Из первого уравнения можно сделать подстановку:

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ \log_2 x + \log_2(4 - x) = \log_2 3 \Rightarrow x(4 - x) = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0, \ \ x_1 = 1, \ \ x_2 = 3. \end{cases}$$

Находим соответствующие значения y: $y_1 = 4 - 1 = 3$, $y_2 = 4 - 3 = 1$. Все найденные решения входят в ОДЗ.

Ответ: (1; 3), (3; 1).

Пример 38. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3(\log_x y + \log_y x) = 10 \\ xy = 81 \end{cases}$.

Ответ: ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$.

Пусть $t = \log_x y$, тогда $\log_y x = \dfrac{1}{\log_x y}$, и из первого уравнения получаем: $3t + \dfrac{3}{t} = 10$,

$3t^2 - 10t + 3 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = \dfrac{1}{3}$.

1 случай. $\log_x y = 3$, следовательно, $y = x^3$. Подставим во второе уравнение: $x^4 = 81$, с учетом ОДЗ $x = 3$, $y = 3^3 = 27$.

2 случай. $\log_x y = \dfrac{1}{3}$, $x = y^3$, $y^4 = 81$, $y = 3$, $x = 27$.

Ответ: (3; 27), (27; 3).

Пример 39. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3^{x+2y} + 3^x = 4 \cdot 3^y \\ 3^{2x+y} + 3 \cdot 3^y = 6 \cdot 3^x \end{cases}$.

Решение.

Сделаем замену: $u = 3^x$, $v = 3^y$ $(u > 0, \ v > 0)$ и получим систему $\begin{cases} uv^2 + u = 4v \\ u^2 v + 3v = 6u \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} uv^2 = 4v - u \\ u^2 v = 6u - 3v \end{cases} \Rightarrow \frac{uv^2}{u^2 v} = \frac{4v - u}{6u - 3v} \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{4v - u}{6u - 3v} \Rightarrow 6u^2 - 3uv = 4v^2 - uv \Rightarrow 3u^2 - uv - 2v^2 = 0.$$

Получено однородное уравнение. Разделим обе части на v^2: $3\left(\dfrac{u}{v}\right)^2 - \dfrac{u}{v} - 2 = 0$,

$\left(\frac{u}{v}\right)_1 = 1,\ \left(\frac{u}{v}\right)_2 = -\frac{2}{3} < 0 -$ постороннее решение, так это отношение может быть только положительным.

Итак, $\frac{u}{v} = 1,\ v = u.$ Подставим этот результат в первое уравнение системы для *u* и *v*:

$u^3 + u = 4u,\ u^3 - 3u = 0,\ u(u^2 - 3) = 0.$ Единственный положительный корень этого уравнения – $u = \sqrt{3}$. Тогда $v = u = \sqrt{3},$ и после обратной замены получаем: $\begin{cases} 3^x = \sqrt{3} \\ 3^y = \sqrt{3} \end{cases},$

следовательно, $x = y = \frac{1}{2}.$

Ответ: (½ ; ½).

Пример 40. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_9(3x+4y) + \log_3 x = \log_3 16 \\ \log_9 x + \log_3 y = \log_3 2 \end{cases}.$

Решение.

ОДЗ: *x* > 0, *y* > 0.

Перейдем во всех логарифмах к основанию 3: $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_3(3x+4y) + \log_3 x = \log_3 16 \\ \frac{1}{2}\log_3 x + \log_3 y = \log_3 2 \end{cases},$

$\begin{cases} \log_3(3x+4y) + 2\log_3 x = 2\log_3 16 \\ \log_3 x + 2\log_3 y = 2\log_3 2 \end{cases},\quad \begin{cases} x^2(3x+4y) = 256 \\ xy^2 = 4 \end{cases}.$ Разделим левую и правую части первого уравнения на соответствующие части второго: $\frac{3x^2 + 4xy}{y^2} = 64,$

$3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\frac{x}{y} - 64 = 0,\ \frac{x}{y} = 4$ (второе решение отрицательно и является посторонним, так как *x* и *y* одного знака, следовательно, их отношение положительно).

Получена подстановка: *x* = 4*y*. Тогда из второго уравнения последней системы 4y^3 = 1,

y = 1, *x* = 4.

Ответ: (4; 1).

Пример 41. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^{\log_2 y} = 3 \\ xy = 6 \end{cases}.$

Решение.

ОДЗ: *x* > 0, *y* > 0. При выполнении этих условий прологарифмируем обе части каждого уравнения по основанию 2: $\begin{cases} \log_2 y \cdot \log_2 x = \log_2 3 \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 6 \end{cases}.$ Представим $\log_2 6 = \log_2(2\cdot 3) =$

$= 1 + \log_2 3$ и сделаем замену: $u = \log_2 x,\ v = \log_2 y.$ Для новых неизвестных решим систему: $\begin{cases} uv = \log_2 3 \\ u + v = 1 + \log_2 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 1 + \log_2 3 - u \\ u^2 - (1 + \log_2 3)u + \log_2 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = \log_2 3 \end{cases}, \begin{cases} u_2 = \log_2 3 \\ v_2 = 1 \end{cases}.$

(Заметим, что корни квадратного уравнения для *u* легко можно найти по теореме Виета). Обратная замена:

1 случай. $\begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 y = \log_2 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$

2 случай. $\begin{cases} \log_2 x = \log_2 3 \\ \log_2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}.$

Ответ: (2; 3), (3; 2).

Комментарий. Простейшее логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ сводится к одной из двух систем неравенств:

1 случай. $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$, если $a > 1$;

2 случай. $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$, если $0 < a < 1$.

Пример 42. Решить неравенство: $\log_3(x-1) + \log_3(x+5) < \log_3(5x+1).$

Решение.

Используя свойства логарифмов, преобразуем левую часть: $\log_3(x-1) + \log_3(x+5) = \log_3((x-1)(x+5)) = \log_3(x^2+4x-5)$ и решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+5>0 \\ 5x+1>0 \\ x^2+4x-5<5x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-x-6<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ -2<x<3 \end{cases} \Rightarrow 1<x<3.$$

Обращаем ваше внимание на то, что положительным должно быть **каждое** логарифмируемое выражение, а не только их произведение.

Ответ: (1; 3).

Пример 43. Решить неравенство: $\log_3 \log_5 \frac{3x+5}{x+6} < 0.$

Решение.

Поскольку $0 = \log_3 1,$ решаем неравенство $\log_3 \log_5 \frac{3x+5}{x+6} < \log_3 1.$ Оно равносильно системе: $\begin{cases} \log_5 \frac{3x+5}{x+6} > 0 \\ \log_5 \frac{3x+5}{x+6<1} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_5 \frac{3x+5}{x+6} > \log_5 1 \\ \log_5 \frac{3x+5}{x+6} < \log_5 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x+5}{x+6} > 0 \\ \frac{3x+5}{x+6} > 1 \\ \frac{3x+5}{x+6} < 5 \end{cases}.$ Заметим, что первое неравенство можно не решать, так как оно заведомо будет верным для всех решений второго неравенства. Тогда $\begin{cases} \frac{3x+5}{x+6} - 1 > 0 \\ \frac{3x+5}{x+6} - 5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{x+6} > 0 \\ \frac{-2x-25}{x+6} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -6 \\ x > \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x < -\frac{25}{2} \\ x > -6 \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\frac{25}{2} \\ x > \frac{1}{2} \end{array} \right. .$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{25}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right).$

Комментарий. Если основание логарифма переменно и может принимать значения как меньшие, так и большие 1, нужно рассмотреть эти ситуации отдельно, так как в первом случае знак неравенства не меняется при переходе к аргументам, а во втором – меняется на обратный.

Пример 44. Решить неравенство: $\log_x(x+4)-\log_{x^2}(x^2-10x+21)\geq 0.$

Решение.

Запишем неравенство в виде: $\log_x(x+4)\geq\dfrac{1}{2}\log_x(x^2-10x+21),\ 2\log_x(x+4)\geq\log_x(x^2-10x+21),$

$\log_x(x+4)^2\geq\log_x(x^2-10x+21)$

(учитываем, что $x > 0$, поэтому $\sqrt{x^2}=x$).

1 случай. $\begin{cases} x>1 \\ x+4>0 \\ x^2-10x+21>0 \\ (x+4)^2\geq x^2-10x+21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-4 \\ x<3,\ \ x>7 \\ 18x\geq 5 \end{cases} \Rightarrow 1<x<3,\ \ x>7.$

2 случай. $\begin{cases} 0<x<1 \\ x+4>0 \\ x^2-10x+21>0 \\ (x+4)^2\leq x^2-10x+21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ x>-4 \\ x<3,\ \ x>7 \\ x\leq\dfrac{5}{18} \end{cases} \Rightarrow 0<x\leq\dfrac{5}{18}.$

Ответ: $\left(0;\dfrac{5}{18}\right]\cup(1;3)\cup(7;+\infty).$

Пример 45. Решить неравенство: $4\log_3 x-18\log_x 3\leq -1.$

Решение.

Пусть $t=\log_3 x,$ тогда $\log_x 3=\dfrac{1}{\log_3 x}=\dfrac{1}{t},$ и для t получаем неравенство: $4t-\dfrac{18}{t}\leq -1,\ \dfrac{4t^2+t-18}{t}\leq 0.$ Не забудьте, что в дробно-рациональном неравенстве важен знак не только числителя, но и знаменателя дроби, и решать его лучше всего методом интервалов (самая распространенная ошибка на этом этапе решения – «отбрасывание» знаменателя). Корни числителя: $-\dfrac{9}{4}$ и 2, корень знаменателя – 0, и знак дроби распределяется на интервалах так:

− + − +

————•————o————•————

$-\dfrac{9}{4}$ 0 2

Следовательно, $t\leq-\dfrac{9}{4}$ или $0 < t \leq 2$ (корень знаменателя, разумеется, в ответ не входит).

1 случай. $\log_3 x \le -\dfrac{9}{4} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \le 3^{-\frac{9}{4}} \end{cases}.$

2 случай. $0 < \log_3 x \le 2 \Rightarrow \log_3 1 < \log_3 x \le \log_3 9 \Rightarrow 1 < x \le 9.$

Ответ: $\left(0;3^{-\frac{9}{4}}\right] \cup (1;9].$.

Пример 46. Решить неравенство: $\sqrt{10\log_2 x + 14} > \log_2 x + 3.$

Сделаем замену: *t* = $\log_2$ *x* и решим для *t* иррациональное неравенство $\sqrt{10t + 14} > t + 3$:

1 случай. $\begin{cases} 10t + 14 \ge 0 \\ t + 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \ge -1{,}4 \\ t < -3 \end{cases}$ – решений нет.

2 случай. $\begin{cases} 10t + 14 \ge 0 \\ t + 3 \ge 0 \\ 10t + 14 > t^2 + 6t + 9 \end{cases} \Rightarrow -1 < t < 5.$

Обратная замена: $-1 < \log_2 x < 5,\ \log_2 \dfrac{1}{2} < x < \log_2 32,\ \dfrac{1}{2} < x < 32.$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};32\right).$

Пример 47. Решить неравенство: $\log_{x-3} 2 + \log_{23-6x} 2 \ge 0.$

Решение.

Определим ОДЗ: $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x - 3 \ne 1 \\ 23 - 6x > 0 \\ 23 - 6x \ne 1 \end{cases} \Rightarrow 3 < x < \dfrac{11}{3},\ \dfrac{11}{3} < x < \dfrac{23}{6}$ и перейдем в обоих логарифмах к основанию 2: $\dfrac{1}{\log_2(x-3)} + \dfrac{1}{\log_2(23-6x)} \ge 0,\ \dfrac{\log_2(23-6x) + \log_2(x-3)}{\log_2(x-3)\cdot\log_2(23-6x)} \ge 0,$

$\dfrac{\log_2(-6x^2 + 41x - 69)}{\log_2(x-3)\cdot\log_2(23-6x)} \ge 0.$ Найдем корни числителя и знаменателя:

1 случай.

$\log_2(-6x^2 + 41x - 69) = 0,\ -6x^2 + 41x - 69 = 1,\ 6x^2 - 41x + 70 = 0,\ x_1 = \dfrac{10}{3},\ x_2 = \dfrac{7}{2}.$

2 случай.

$\log_2(x-3) = 0,\ x - 3 = 1,\ x = 4 -$ не входит в ОДЗ.

$\log_2(23-6x) = 0,\ 23 - 6x = 1,\ x = \dfrac{11}{3}$ (само это значение тоже не входит в ОДЗ, но слева и справа от него определены все функции, присутствующие в неравенстве, и один из множителей знаменателя в этой точке меняет знак).

Итак, в рамках ОДЗ дробь меняет знак трижды: в точках $\dfrac{10}{3},\ \dfrac{7}{2}$ и $\dfrac{11}{3}.$ Расставим знаки на интервалах. При $x = \dfrac{15}{4}$ (точка, расположенная на самом правом интервале) $x - 3 = 0{,}75 < 1$, $23 - 6x = 0{,}5 < 1$, $-6x^2 + 41x - 69 = 0{,}375 < 1$, поэтому все три логарифма, входящие в последнюю форму неравенства, отрицательны; соответственно, отрицательна и сама дробь.

$$\underset{3}{\circ}\overset{+}{\text{———}}\underset{\frac{10}{3}}{\bullet}\overset{-}{\text{———}}\underset{\frac{7}{2}}{\bullet}\overset{+}{\text{———}}\underset{\frac{11}{3}}{\circ}\overset{-}{\text{———}}\underset{\frac{23}{6}}{\circ}$$

Ответ: $\left[\frac{10}{3};\frac{7}{2}\right]\cup\left(\frac{11}{3};\frac{23}{6}\right).$

Пример 48. Решить неравенство: $\log_2 \log_{x+1}(3x+2) \le 0.$

Решение.

Превратим простейшее неравенство $\log_2 \log_{x+1}(3x+2) \le \log_2 1$ в систему:

$\begin{cases} \log_{x+1}(3x+2) > 0 \\ \log_{x+1}(3x+2) \le 1 \end{cases}$ и перейдем к любому постоянному основанию (например, 2):

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_2(x+1)} > 0 \\ \dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_2(x+1)} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2>0,\ \ x+1>0 \\ \dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_2(x+1)} > 0 \\ \dfrac{\log_2(3x+2)-\log_2(x+1)}{\log_2(x+1)} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_2(x+1)} > 0. \\ \dfrac{\log_2 \dfrac{3x+2}{x+1}}{\log_2(x+1)} \le 0 \end{cases}$$

Решим второе и третье неравенства методом интервалов.

1 случай. $\log_2(3x+2)=0,\ 3x+2=1,\ \ x=-\frac{1}{3};\ \log_2(x+1)=0,\ \ x+1=1,\ \ x=0.$

$$\underset{-\frac{2}{3}}{\circ}\overset{+}{\text{———}}\underset{-\frac{1}{3}}{\circ}\overset{-}{\text{———}}\underset{0}{\circ}\overset{+}{\text{———}}$$

Решение второго неравенства: $-\frac{2}{3}<x<-\frac{1}{3},\ \ x>0.$

2 случай. $\log_2\frac{3x+2}{x+1}=0,\ \frac{3x+2}{x+1}=1,\ 3x+2=x+1,\ \ x=-\frac{1}{2};$ корень знаменателя (x = 0) тот же, что в предыдущем неравенстве.

$$\underset{-\frac{2}{3}}{\circ}\overset{+}{\text{———}}\underset{-\frac{1}{2}}{\bullet}\overset{-}{\text{———}}\underset{0}{\circ}\overset{+}{\text{———}}$$

Решение: $-\frac{1}{2}\le x<0.$

Окончательным решением будет пересечение полученных промежутков: $-\frac{1}{2}\le x<-\frac{1}{3}.$

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right).$

Пример 49. Решить неравенство: $\log_{x-1}16\cdot\log_2(x+11)\le 8.$

Решение.

ОДЗ: $x-1>0,\ \ x-1\ne 1,\ \ x+1>0 \Rightarrow 1<x<2,\ \ x>2.$

Преобразуем первый логарифм: $\log_{x-1}16=4\log_{x-1}2=\dfrac{4}{\log_2(x-1)}$. Тогда

$$\frac{4\log_2(x+11)}{\log_2(x-1)}\le 8,\ \ \frac{\log_2(x+11)}{\log_2(x-1)}\le 2,\ \ \frac{\log_2(x+11)-2\log_2(x-1)}{\log_2(x-1)}\le 0,\ \ \frac{\log_2\dfrac{x+11}{(x-1)^2}}{\log_2(x-1)}\le 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:

1 случай.

$\log_2\dfrac{x+11}{(x-1)^2}=0,\ \ \dfrac{x+11}{(x-1)^2}=1,\ \ x+11=x^2-2x+1,\ \ x^2-3x-10=0,\ \ x_1=5,\ \ x_2=-2-$ не входит в ОДЗ.

2 случай.

$\log_2(x-1)=0,\ \ x-1=1,\ \ x=2-$ точка, лежащая внутри ОДЗ.

Расставим знаки (при *x* = 10, то есть на самом правом из полученных промежутков, числитель дроби отрицателен, а знаменатель положителен, то есть вся дробь отрицательна).

```
  –           +          –
o_______o_________•__________
1       2         5
```

Ответ: $(1;2)\cup[5;+\infty)$.

Пример 50. Решить неравенство: $\log_{x+7}9-\log_{|x+1|}3\le 0.$

Решение.

Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x+7>0\\ x+7\ne 1\\ |x+1|>0\\ |x+1|\ne 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x>-7\\ x\ne -6\\ x\ne -1\\ x\ne -2,\ \ x\ne 0\end{cases}\Rightarrow x\in(-7;-6)\cup(-6;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty).$$

Перейдем к основанию 3:

$$\frac{2}{\log_3(x+7)}-\frac{1}{\log_3|x+1|}\le 0,\ \ \frac{2\log_3|x+1|-\log_3(x+7)}{\log_3(x+7)\cdot\log_3|x+1|}\le 0,\ \ \frac{\log_3\dfrac{(x+1)^2}{x+7}}{\log_3(x+7)\cdot\log_3|x+1|}\le 0$$

(учитываем, что $|\,x+1\,|^2=(\,x+1\,)^2$).

Применим метод интервалов:

1 случай. $\log_3\dfrac{(x+1)^2}{x+7}=0,\ \ \dfrac{(x+1)^2}{x+7}=1,\ \ x^2+x-6=0,\ \ x_1=-3,\ \ x_2=2.$

2 случай. $\log_3(x+7)=0,\ \ x+7=1,\ \ x=-6;$

$\log_3|x+1|=0,\ \ |x+1|=1,\ \ x+1=\pm 1,\ \ x=-2,\ \ x=0.$

Отметим, что из всех изолированных точек, не входящих в ОДЗ, только *x* = - 1 не является корнем числителя или знаменателя; соответственно в этой точке знак дроби не меняется.

Расставим знаки, учитывая, что на самом правом интервале все логарифмы, входящие в левую часть неравенства, положительны:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & - & & + & & - & & + & & + & & - & & + & \\ \circ & & \circ & & \bullet & & \circ & & \circ & & \circ & & \bullet & & \\ -7 & & -6 & & -3 & & -2 & & -1 & & 0 & & 2 & & \end{array}$$

Ответ: (- 7; - 6)U[- 3; - 2)U(0; 2].

Комментарий. При решении подобных неравенств применяются те же приемы, что и при решении уравнений аналогичного типа (замены, логарифмирование, потенцирование). Как всегда, внимательно следите за ограничениями на ОДЗ.

Пример 51. Решить неравенство: $\log_3(3^x - 3) + x < \log_3 10$.

Решение.

Представим $x = \log_3 3^x$, сделаем замену $t = 3^x$ и решим для t систему неравенств с учетом ОДЗ: $\begin{cases} t-3>0 \\ t(t-3)<10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t>3 \\ t^3-3t-10<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t>3 \\ -2<t<5 \end{cases} \Rightarrow 3<t<5.$

Обратная замена: $3 < 3^x < 5,\ 3^1 < 3^x < 3^{\log_3 5},\ 1 < x < \log_3 5.$

Ответ: (1; $\log_3 5$).

Пример 52. Решить неравенство: $x^{2\lg x - 3} < 1000x^2$.

Решение.

Если прологарифмировать обе части неравенства по любому основанию, большему 1, знак неравенства не изменится (учитываем, что в области допустимых значений обе части положительны). Логарифмируем по основанию 10:

$$(2\lg x - 3)\lg x < 3 + 2\lg x,\ \ t = \lg x,\ \ 2t^2 - 5t - 3 < 0,\ \ -\frac{1}{2} < t < 3,\ \ -\frac{1}{2} < \lg x < 3,\ \ 10^{-\frac{1}{2}} < x < 1000.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};1000\right)$.

Пример 53. Решить неравенство: $(x+8)^{\log_{x-4} 4} \le 16.$

Решение.

Вновь перед нами в левой части выражение вида $f(x)^{g(x)}$. Наиболее удобный прием для упрощения – логарифмирование. Прологарифмируем обе части по основанию 4 и составим систему неравенств с учетом ОДЗ:

$$\begin{cases} x+8>0 \\ x-4>0 \\ x-4 \ne 1 \\ \log_{x-4} 4 \cdot \log_4(x+8) \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x \ne 5 \\ \dfrac{\log_4(x+8)}{\log_4(x-4)} - 2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x \ne 5 \\ \dfrac{\log_4 \dfrac{x+8}{(x-4)^2}}{\log_4(x-4)} \le 0 \end{cases}.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов.

1 случай. $\log_4 \frac{x+8}{(x-4)^2} = 0,\ \frac{x+8}{(x-4)^2} = 1,\ x^2 - 9x + 8 = 0,\ x_1 = 8,\ x_2 = 1 -$ не входит в ОДЗ.

2 случай. $\log_4(x-4)=0,\ x-4=1,\ x=5-$ точка лежит внутри ОДЗ, знак дроби в ней меняется.

При достаточно больших значениях *x* аргумент логарифма, стоящего в числителе, меньше 1, то есть числитель дроби отрицателен, а знаменатель положителен. С учетом этого расставим знаки на интервалах:

$$\begin{array}{ccccc} & - & & + & & - \\ \circ & \text{———} & \circ & \text{————} & \bullet & \text{————} \\ 4 & & 5 & & 8 & \end{array}$$

Таким образом, $4 < x < 5$ или $x \geq 8$.

Ответ: (4; 5)U[8; +∞).

Пример 54. Решить неравенство: $(x-2)^{\log_3(x-5)} \geq x^2-10x+25.$

Решение.

Задаем ОДЗ и логарифмируем обе части по основанию 3:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x-5>0 \\ x-5\neq 1 \\ \log_3(x-5)\cdot\log_3(x-2)\geq\log_3(x^2-10x+25) \end{cases}.$$

Заметим, что $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$. Тогда

$$\begin{cases} x>5 \\ x\neq 6 \\ \log_3(x-5)\cdot\log_3(x-2)\geq 2\log_3(x-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5 \\ x\neq 6 \\ \log_3(x-5)(\log_3(x-2)-2)\geq 0 \end{cases}.$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов.

1 случай. $\log_3(x-5)=0,\ x-5=1,\ x=6-$ сама эта точка в ОДЗ не входит, но знак первого множителя в ней меняется.

2 случай. $\log_3(x-2)-2=0,\ \log_3(x-2)=2,\ x-2=9,\ x=11.$

Расставим знаки на интервалах (при $x > 11$ левая часть положительна):

$$\begin{array}{ccccc} & + & & - & & + \\ \circ & \text{————} & \circ & \text{————} & \bullet & \text{————} \\ 5 & & 6 & & 8 & \end{array}$$

Ответ: (5; 6)U[8; +∞).

Пример 55. Решить неравенство: $2^{\log_3 x} \leq 56-6\cdot x^{\log_3 2}.$

Решение.

Воспользуемся одним из свойств логарифмов (см. занятие 13): $x^{\log_3 2}=2^{\log_3 x}$. Неравенство сразу резко упрощается: $2^{\log_3 x}\leq 56-6\cdot 2^{\log_3 x},\ 7\cdot 2^{\log_3 x}\leq 56,\ 2^{\log_3 x}\leq 8,\ \log_3 x\leq 3,$ и, с учетом ОДЗ, $0 < x \leq 27$.

Ответ: (0; 27].

Пример 56. Решить неравенство: $\log_2(2^x-3)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-6)\leq -2.$

Решение.

Упростим второй множитель левой части: $\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-6) = -\log_2\left(2(2^x-3)\right) = -(1+\log_2(2^x-3))$. Этот результат позволяет сделать замену: $t = \log_2(2^x - 3)$ и решать неравенство: $-t(t+1) \le -2$, $t(t+1) \ge 2$, $t^2 + t - 2 \ge 0$, $t \le -2$ или $t \ge 1$. Сделаем обратную замену.

1 случай. $\log_2(2^x-3) \le -2 \Rightarrow \begin{cases} 2^x - 3 > 0 \\ 2^x - 3 \le \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 3 < 2^x \le \dfrac{13}{4} \Rightarrow \log_2 3 < x \le \log_2 \dfrac{13}{4}.$

2 случай. $\log_2(2^x-3) \ge 1 \Rightarrow 2^x - 3 \ge 2,\ 2^x \ge 5,\ x \ge \log_2 5.$

Ответ: $\left(\log_2 3; \log_2 \dfrac{13}{4}\right] \cup \left[\log_2 5; +\infty\right).$

Пример 57. Решить неравенство: $\log_2(2^x-5) - \log_{2^x-5} 16 \ge -3.$

Решение.

Замена: $t = \log_2(2^x-5),\ \log_{2^x-5} 16 = 4\log_{2^x-5} 2 = \dfrac{4}{\log_2(2^x-5)} = \dfrac{4}{t}.$

Решим неравенство для t: $t - \dfrac{4}{t} + 3 \ge 0,\ \dfrac{t^2+3t-4}{t} \ge 0,\ t \le -4$ или $0 < t \le 1.$ Обратная замена:

1 случай.

$$\log_2(2^x-5) \le -4 \Rightarrow \begin{cases} 2^x - 5 > 0 \\ 2^x - 5 \le \dfrac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow 5 < 2^x \le \dfrac{81}{16} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 \Rightarrow \log_2 5 < x \le 4\log_2 \dfrac{3}{2}.$$

2 случай.

$$0 < \log_2(2^x-5) \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 2^x - 5 > 1 \\ 2^x - 5 \le 2 \end{cases} \Rightarrow 6 < 2^x \le 7 \Rightarrow \log_2 6 < x \le \log_2 7.$$

Ответ: $\left(\log_2 5; 4\log_2 \dfrac{3}{2}\right] \cup \left(\log_2 6; \log_2 7\right].$

Пример 58. Решить неравенство: $x \cdot 4^{\log_x 8} \ge 32.$

Решение.

Учтем ОДЗ: $x > 0$, $x \ne 1$ и прологарифмируем обе части по основанию 2:

$$\log_2\left(x \cdot 4^{\log_x 8}\right) \ge \log_2 32,\ \log_2 x + \log_2\left(\left(2^2\right)^{3\log_x 2}\right) \ge 5,\ \log_2 x + 6\log_x 2 - 5 \ge 0,\ \log_2 x + \frac{6}{\log_2 x} - 5 \ge 0.$$

Замена: $t = \log_2 x,\ \dfrac{t^2-5t+6}{t} \ge 0,\ 0 < t \le 2$ или $t \ge 3.$

1 случай. $0 < \log_2 x \le 2 \Rightarrow 1 < x \le 4.$

2 случай. $\log_2 x \ge 3 \Rightarrow x \ge 8.$

Ответ: (1: 4]U[8; +∞).

Пример 59. Решить неравенство: $\left|\log_2 \dfrac{x}{6}\right|^{x^2-18x+56} > 1.$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 6$ (подмодульное выражение не должно равняться нулю). Прологарифмиру-ем обе части по основанию 2: $(x^2 - 18x + 56)\cdot\log_2\left|\log_2\frac{x}{6}\right| > 0$ и решим полученное нера-венство методом интервалов.

1 случай. $x^2 - 18x + 56 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = 14$.

2 случай. $\log_2\left|\log_2\frac{x}{6}\right| = 0,\ \left|\log_2\frac{x}{6}\right| = 1,\ \log_2\frac{x}{6} = \pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{6} = 2\\ \frac{x}{6} = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = 12\\ x = 3\end{array}\right.$.

Расставим знаки на интервалах, учитывая, что при $x > 14$ левая часть неравенства положительна, а при $x = 6$ ни один из множителей не меняет знак:

+	–	+	+	–	+

o_______o_______o______o______o_______o_________

0 3 4 6 12 14

Ответ: (0; 3)U(4; 6)U(6; 12)U(14; +∞).