Фракталы.

Термин фрактал (от лат. «изломанный», «дробный») ввел в употребление в 1975 г. американский математик Бенуа Мандельброт Фракталами он назвал структуры, обладающие двумя важнейшими признаками: изломанностью и самоподобием (любая часть структуры подобна целому).

Изломанные фрактальные функции, не имеющие производной ни в одной своей точке (в точке излома, как известно, функция остается непрерывной, но теряет производную), были открыты в XIX веке. Однако именно по эстетическим соображениям эти «некрасивые» функции были отвергнуты всеми математиками.

Один из первых примеров непрерывной, всюду недифференцируемой (а значит и всюду изломанной) функции дал выдающийся немецкий математик Карл Вейерштрасс. Функция Вейерштрасса задается рядом Фурье - бесконечной суммой тригонометрических функций:

$$W(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right) \quad ,a<1, \quad b>1, \quad ab>1$$

Она обладает сложной изломанной структурой и является само подобной: форма функции не меняется при растяжении в b раз по оси абсцисс и в 1/a раз вдоль оси ординат. На рисунке (а) показана функция Вейерштрасса при a=0.5 и Ь=4 и три последовательных увеличения ее центральной части (б, в, г). Рисунок получен 4-хкратным увеличением по оси абсцисс и 2-хкратным - по оси ординат части функции заключенной в прямоугольник на рис. (а). Рисунок (в) есть увеличенное изображение прямоугольника на рисунке (б), а рисунок (г) - увеличенное изображение прямоугольника на рисунке (в).

Легко видно, что заключенные в прямоугольник функции являются точными копиями предыдущего целого, т.е. функция Вейерштрасса является самоподобной Образно говоря, рассматривая данную функцию во все более сильную лупу, мы видим в ее частях зароды-ши целого. Бесконечно малая часть функции генерирует форму всего целого. Все это сильно напоминает ситуацию с геномом (набором генов) человека или животного, когда одна клетка живого организма содержит информацию обо всем целом И в этом один из важных моментов для понимания обширнейших при ложен и й фрактальных функций.

Одна из важнейших характеристик геометрического множества - его мера. Например, понятна такая мера, как длина отрезка ос, площадь квадрата со стороной ос является a^2, а объем куба со стороной а является a^3. Очевидно, что к-мерное множество нужно измерять к-мерными кубами - так можно наметить понятие конечной меры.

Но справедливо ли понятие длины к фрактальной линии? Т.к. ка ждая сколь угодно малая часть фрактальной линии содержит в себе уменьшенную копию всей линии, то значит она состоит не из точек, а из функций. Так что же такое фрактал - одномерная линия, двумерная фигура или нечто среднее между ними?

Если множество измерять большей мерой, то его мера будет рав на нулю, а если множество измерять меньшей мерой, то его мера бу дет бесконечной. Например, если двумерный квадрат измерять трех мерными кубами, то мера квадрата будет нулевая. И наоборот, если тот же двумерный квадрат измерять одномерными отрезками, то мера квадрата будет равна бесконечности, т.е. для измерения квадрата требуется бесконечно много одномерных отрезков.

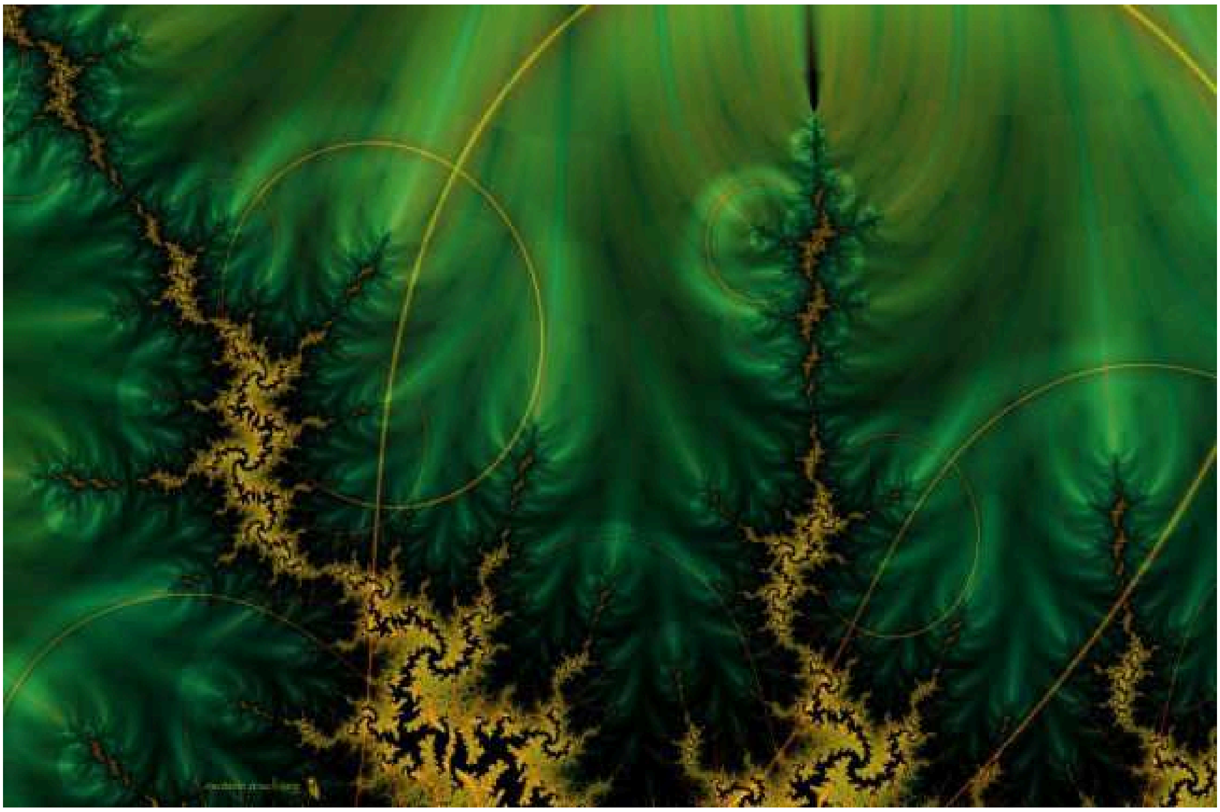
Но ведь именно с такой ситуацией мы столкнулись при измерении фрактальных линий! Оказывается фрактал имеет дробную размерность - не чудо ли это?! Причем фрактальная линия есть некая «тол стая линия» размерности 1<к<2, а фрактальная поверхность - некая "вспененная поверхность" дробной размерности 2<к< 3.

Помимо дробной размерности, еще одним удивительным свойством фракталов является их широчайшее распространение в природе Оказывается фракталы окружают нас всюду! Причудливые очертания береговых линий и замысловатые извилины рек, изломанные поверхности горных хребтов и гладкие самоподобные вздутия облаков, раскидистые ветви деревьев и разветвленные сети кровеносных сосудов и нейронов, робкое мерцание пламени свечи и турбулентные потоки горных рек - все это фракталы. Одни фракталы, типа облаков или бурных потоков, постоянно изменяются, другие, подобные деревьям или нейронным сетям, контурам береговых линий, сохраняют свою структуру неизменной. Общим для тех и других является еще одна отличительная особенность: фрактальные структуры выступают неким пограничным образованием между Космосом и Хаосом, что придает им особую эстетическую привлекательность. В 1984 г. на выставке произведений искусства «Границы хаоса» имели ошеломляющий успех черно-белые и цветные распечатки множества Мандельброта. Фрактальный бум охватил всю планету и стал одной ярких примет уходящего XX века.

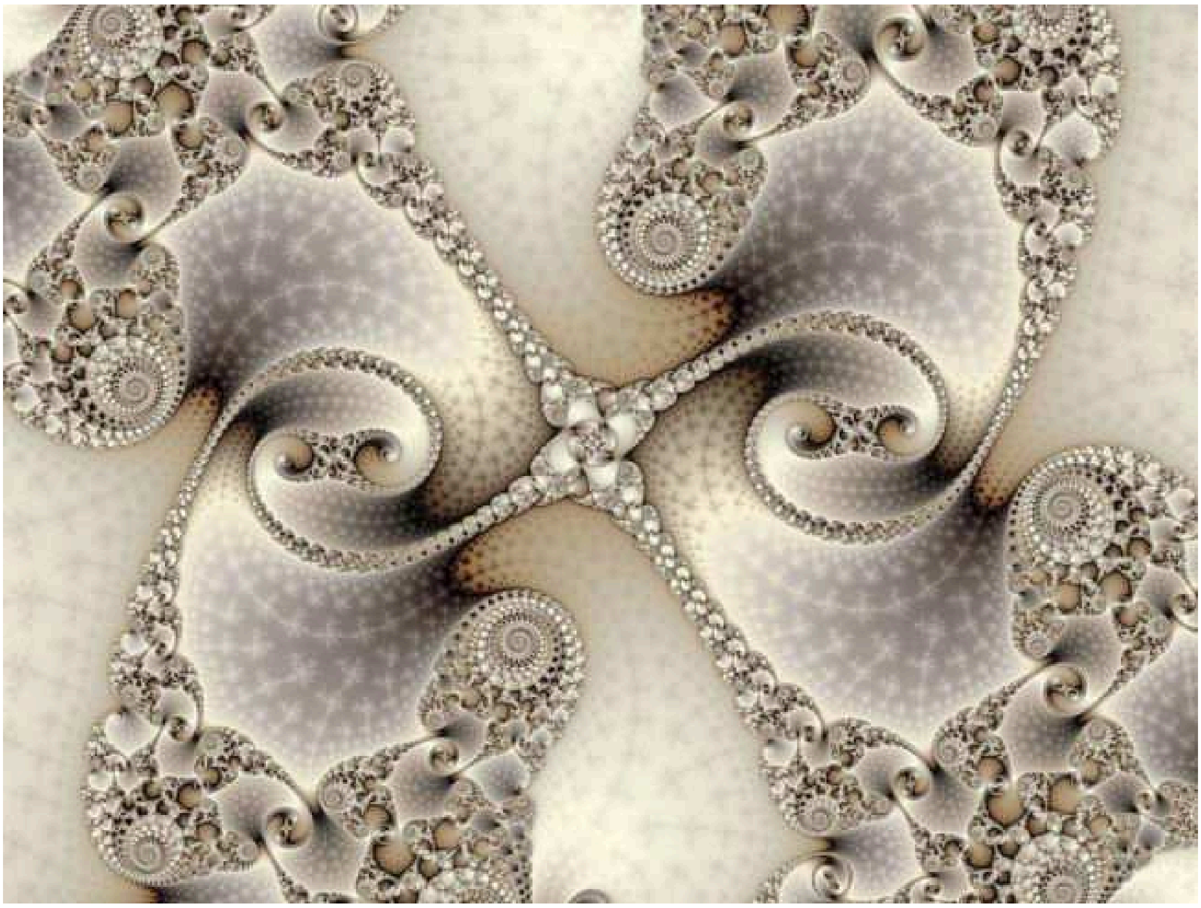
Как долго человечество шло к осознанию единства того, что его окружает на каждом шагу в своем неисчерпаемом многообразии!

Язык фрактальной геометрии природы оставался непонятным человечеству вплоть до появления в 1983 г. книги Мандельброта «Фрактальная геометрия природы». До этого времени в течение 2-х тысячелетий ученые говорили на языке Евклида. Идеально регулярные образы - прямая и плоскость, треугольник и пирамида, окружность и сфера - составляли основу этого языка и всей научной картины мира. Это регулярно-геометрическое кредо сформулировал в 1623 г. Галилео Галилей «Философия природы написана в величайшей книге - Вселенной, которая всегда открыта перед нашими глазами, но понять ее сможет лишь тот, кто сначала выучит язык и постигнет письмена, которыми она начертана. А написана эта книга на языке математики, и письмена ее - треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без коих нельзя понять по-человечески ее слова: без них - тщетное кружение в темном лабиринте».

Потребовалось еще 350 лет кружения наук по прямым и окружностям, прежде чем оно обрело качественно новый язык фрактальной геометрии. Фрактальная геометрия - это революция в математике и математическом описании природы, возможно, равная по силе революции интегрального и дифференциального исчисления Ньютона и Лейбница.




exoteric.roach.org




SHAMAN'S JOURNEY